Exercice 1: 3 points

On considère les points $A(0,2,1)$ et $B(1,-1,0)$ dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

0.50 **1. a.** *Montrer que :* $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ *puis déduire que les points O , A et B ne sont pas alignés.*

0.50 **b.** *Montrer que :* $x+y-2z=0$ *est une équation cartésienne du plan (OAB)*

0.50 **2.** *Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) , orthogonale au plan (OAB) au point A*

3. *Soit (S) la sphère de centre B et qui passe par le point O*

0.50 **a.** *Montrer que* $x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$ *est une équation cartésienne de la sphère (S)*

0.50 **b.** *Montrer que le plan (OAB) coupe (S) suivant un cercle (Γ) dont on donnera le centre et le rayon.*

0.50 **c.** *Calculer la distance $d(B,(\Delta))$ puis déduire la position relative de (Δ) et la sphere (S)*

Exercice 2: 2.5 points

I. *On considère le nombre complexe* $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

0.75 **1.** *Montrer que* $|a|=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ *, puis vérifier que* $a=2\left(1+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

0.75 **2.** *Montrer que* $a=4\cos\frac{\pi}{8}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$ *puis déduire que* $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

II. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points Ω , A et B d'affixes respectives* $\omega=\sqrt{2}$ *,* $a=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ *et* $b=2i$ *. Soit R la rotation de centre Ω et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

0.50 **1.** *Montrer que le point B est l'image du point A par la rotation R*

0.50 **2.** *En déduire la nature du triangle ΩAB*

Exercice 3: 2.5 points

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=96$ *et* $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+10$

0.75 **1.** *Vérifier que $u_n>15$, pour tout entier naturel n*

2. *Soit (v_n) la suite numérique définie par :* $v_n=u_n-15$*, pour tout entier naturel n*

0.50 **a.** *Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison* $\frac{1}{3}$ *, puis écrire v_n en fonction de n.*

0.75 **b.** *En déduire que* $u_n=15+81.\left(\frac{1}{3}\right)^n$*, pour tout entier naturel n, puis calculer la limite de (u_n).*

0.50 **c.** *Déterminer le plus petit entier naturel n, pour lequel $u_n<16$*

Exercice 4: 3 points

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher : Deux jetons qui portent le numéro ⓪ , deux jetons qui portent le numéro ① et un jeton qui porte le numéro ②.
On tire simultanément et au hasard deux jetons de l'urne.
Soit A l'événement : « tirer deux jetons qui portent le même numéro. »

0.50 **1.** *Montrer que* $p(A)=\frac{1}{5}$

2. *Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage la somme des numéros que portent les boules tirées.*

0.25 **a.** *Vérifier que les valeurs prises par la variable X sont :* $0;1;2;3$

0.75 **b.** *Montrer que* $p(X=2)=\frac{3}{10}$ *et déduire que les événements $(X=2)$ et A sont dépendants.*

0.75 **c.** *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X*

0.75 **3.** *On répète l'expérience précédente cinq fois successives , en remettant les jetons obtenus après chaque tirage à l'urne avant de faire le tirage suivant.*

Calculer la probabilité de réaliser l'événement A une fois au moins .

Problème : 9 points

Partie I : (1.5pts)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ *par :* $g(x)=x-2\ln x$.

0.50 **1. a.** *Montrer que* $\forall x\in]0,+\infty[: g'(x)=\dfrac{x-2}{x}$

0.50 **b.** *Étudier le signe de* $g'(x)$ *, puis dresser le tableau de variations de la fonction g sur* $]0,+\infty[$

0.50 **2.** *Déduire que* $\forall x\in]0,+\infty[:\quad g(x)>0$. *(Remarquer que* $g(2)>0$*)*

Partie II : (6pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ *par :* $f(x)=x-(\ln x)^2$.
Soit $(\mathscr{C}_f)$ *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *tel que* $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\,cm$

0.50 **1. a.** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ *et donner une interprétation géométrique de ce résultat.*

0.50 **b.** *Montrer que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ *et déduire que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *(On peut poser* $t=\sqrt{x}$*)*

0.50 **2. a.** *Montrer que* $(\mathscr{C}_f)$ *admet une branche parabolique de direction la droite* $(\Delta): y=x$ *au voisinage de* $+\infty$

0.50 **b.** *Vérifier que la courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *est au-dessous de la droite* (Δ) *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$

0.50 **3. a.** *Montrer que* $\forall x\in]0,+\infty[\ ,\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

0.50 **b.** *En déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle* $]0,+\infty[$

0.50 **4. a.** *Montrer que f est deux fois dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et que* $\forall x\in]0,+\infty[\ ,\ f''(x)=\dfrac{2(\ln(x)-1)}{x^2}$.

0.50 **b.** *En déduire que la courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *admet un point d'inflexion I dont on donnera les coordonnées.*

0.50 **5.** *Montrer que l'équation* $f(x)=0$ *admet une unique solution* α *dans* $]0,+\infty[$ *et que* $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$

0.50 **6. a.** *Déterminer l'équation de la tangente* (T_1) *à la courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *au point d'abscisse* 1.

1.00 **b.** *Tracer la courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *et la la tangente* (T_1) *dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$. *(On prend :* $e\approx 2.7$*)*

Partie III : (1.5pts)

On considère les fonctions $H: x\mapsto x\ln x-x$ *et* $h: x\mapsto \ln x$ *définies sur* $]0,+\infty[$

0.50 **1.** *Vérifier que la fonction H est une primitive de h sur sur* $]0,+\infty[$ *puis montrer que* $\displaystyle\int_1^e(\ln x)\,dx=1$

0.50 **2.** *En utilisant une intégration par partie , montrer que* $\displaystyle\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$

0.50 **3.** *Déduire en* cm^2 *l'aire du domaine limité par* $(\mathscr{C}_f)$ *,* (Δ) *et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=e$

Fin de l'épreuve.