<table>
<tr><td colspan="2">المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني</td><td colspan="2">مباراة توظيف أساتذة التعليم
التعليم الثانوي التأهيلي من الدرجة الثانية
- التخصص : الريـــــاضيــــــات
دورة يوليوز 2016</td></tr>
<tr><td colspan="2">الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
الرباط – سلا - القنيطرة</td><td colspan="2">موضوع الاختبار الكتابي</td></tr>
<tr><td>المادة: التخصص</td><td>التاريخ: 01 يوليوز 2016</td><td>مدة الإنجاز : 5 ساعات</td><td>الصفحة : 1 على 4</td></tr>
</table>

La présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage de la calculatrice, de tout matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

سلم التنقيـــــط :

- مسألة 1 : (10 نقط)
- مسألة 2 : (10 نقط)

Problème 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E): \quad y' + (\frac{1}{x} - 1)y = \frac{1}{x},$$

où y est définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

Partie I :

1. Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E).
2. Soit u la fonction définie sur I par : $u(x) = \frac{e^x}{x}v(x)$, où v est une fonction dérivable sur I.
   a. Déterminer v pour que u soit une solution particulière de l'équation (E).
   b. Montrer que toute solution de (E) s'écrit sous la forme $y: \ x \mapsto \frac{\alpha e^x - 1}{x}$ oùα est un nombre réél.
   c. Montrer que parmi ces solutions, il existe une et une seule qui est prolongeable par continuité en zéro.

Partie II :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. **a.** Montrer que le développement limité de f au voisinage de zéro à l'ordre 2 est :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

   b. En déduire que f est dérivable en 0 puis écrire l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
2. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à préciser.
4. Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R} \ \ (x-1)e^x + 1 \geq 0$.
5. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer que la fonction f est convexe, puis tracer $\mathcal{C}_f$.

Partie III :

Soit $(u_n)_n$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1, \ u_{n+1} = f(u_n) - 1, \ n \in \mathbb{N}$. ($f$ est la fonction définie à la partie I.)

1. **a.** Vérifier que $0 < u_1 < u_0$.
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: \ u_{n+1} < u_n$.
2. En déduire que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente.
3. Montrer que $0 \leq L \leq 1$.

4. Etablir que $L = 0$ ou bien $e^L = L^2 + L + 1$.
5. Montrer que : $\forall x \in]0,1]$: $e^x - (x^2 + x + 1) > 0$. Quelle est la valeur de L ?

Partie IV :

Soit F la fonction :

$$\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt & \text{si} \quad x > 0, \\ F(0) = \ln 2. \end{cases}$$

1. **a.** En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[0,t]$, $t > 0$. Montrer que $0 < \frac{f(t)-1}{t} < f'(t)$

   b. En déduire que : $\forall x > 0$, $F(x) - \ln 2 \leq f(2x) - f(x)$ puis que F est continue en zéro à droite.
2. Pour tout $x > 0$, montrer que :

$$f(x) \ln 2 \leq F(x) \leq f(2x) \ln 2$$

3. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.
4. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$: $F'(x) = \frac{f(2x)-f(x)}{x}$. Donner le sens de variation de F.
5. Ecrire le développement limité de F en zéro à l'ordre 2 puis en déduire que F est dérivable à droite en zéro. Combien vaut $F'(0)$?

Problème 2

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une algèbre. A toute matrice M, on associe un unique endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M. La matrice identité d'ordre 3 est notée I_3. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie I :

1. Calculer le déterminant de A. La matrice A Est-elle inversible ?
2. **a.** Expliciter la matrice J telle que $A = I_3 + J$ puis calculer J^2 et J^3.

   b. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, J^n est la matrice nulle.
3. Montrer que

$$\textbf{(E) :} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

4. En déduire alors, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2 , l'expression explicite de la matrice A^n.
5. Calculer :$(I_3 + J)(I_3 - J + J^2)$.
6. En déduire que la matrice A est inversible et préciser A^{-1} en fonction de I_3 et J.
7. Vérifier que la relation **(E)** reste valable pour $n = -1$.

Partie II :

1. Vérifier que la matrice $A - I_3$ n'est pas inversible.
2. Déterminer un vecteur non nul e_1 tel que $(A - I_3)e_1 = 0$.
3. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à A.

   a. Donner une base (e_2, e_3) du sous espace vectoriel $(\mathcal{P})$ d'équation : $y = 0$.

   b. Exhiber (donner) un vecteur non nul v tel que $v \in (\mathcal{P})$ et $f(v) \notin (\mathcal{P})$.

   c. Vérifier que la famille $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   d. Ecrire la matrice de l'endomophisme f dans la base B.