Exercice 1 : 4 pts
Calculer les limites suivantes :

1. [1 pt] $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x^2-6x+5}$
2. [1 pt] $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$
3. [1 pt] $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x$
4. [1 pt] $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x+1}}$

Exercice 2 : 9 pts
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = x-1+2\sqrt{1-x} & ;\ x<1, \\ f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+3} & ;\ x \geq 1, \end{cases}$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. [½ pt] Montrer que f est continue en $x_0 = 1$.
2. [1 pt] Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et montrer que : $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.
3. [2 pts] Étudier la dérivabilité de la fonction f en 1 à gauche et à droite, et interpréter géométriquement les deux résultats obtenues.
4. (a) [1 pt] Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   (b) [1 pt] Montrer que
   $$\forall x \in]-\infty;1[\quad ; \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$$
   .
   (c) [1 pt] Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   (d) [½ pt] Déterminer l'équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   (a) [1 pt] Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'l'on déterminera .
   (b) [1 pt] Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 3 : 7 pts
Soit u une fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $u(x) = 2x^3-3x^2-1$.

1. (a) [1 pt] Calculer $u'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$, et dresser le tableau de variation de la fonction u sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.
   (b) [1 pt] Monter que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1;+\infty[$, et verifier que $1<\alpha<2$.
   (c) [1 pt] En utilisant la méthode de la dichotomie, donner un encadrement du nombre α d'amplitude 25.10^{-2}
   (d) [1 pt] Montrer que $u(x) \geq 0$ sur $[\alpha;+\infty[$ et que $u(x) \leq 0$ sur $]-1;\alpha]$.
2. On considère la fonction numérique f définie sur $]-1;+\infty[$ par :
   $$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$
   .
   (a) [1 pt] Calculer les limites $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
   (b) [1 pt] Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(1+x^3)^2}$.
   (c) [1 pt] Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

Bonus : Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2(1-\alpha)}{3(\alpha^2+1)}$.