

### EXERCICE 01

Exprimer les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques puis indiquer la valeur de vérité de chacun d'elles :

$P_1$  : « il n'existe aucun rationnel solution de l'équation  $x^2 - 2 = 0$  »

$P_2$  : « Pour tous rationnels  $x$  et  $y$  tels que  $x < y$  il existe un rationnel  $z$  tel que :  $x < z < y$  »

$P_3$  : Pour tout réel  $x$ , il existe un unique entier relatif  $p$  tel que  $p \leq x < p + 1$  »

$P_4$  : « Pour tout entier naturel  $n$ , il existe un entier naturel  $m$  tel que  $n \leq m + 2$  »

$P_5$  : « Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $x^2 + y^2 = 0$  si seulement si :  $x = 0$  et  $y = 0$  »

$P_6$  : « Pour tout réel  $x$ , si  $x \in [1, +\infty[$  alors  $x^2 \geq x$  »

$P_7$  : « Tout entier naturel divisible par 3 est divisible Par 9 »

$P_8$  : « certains réels sont strictement supérieurs à leur carré »

### EXERCICE 02

1) Donner la négation de chacune des propositions suivantes

$$P: (\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{x^2 + 1} - |x| \geq 0.$$

$$Q: (\exists x \in \mathbb{R}^+); \left(x^2 \leq x \text{ ou } 1 + \frac{1}{x} < 0\right)$$

$$R: (\forall y \in \mathbb{R}^*) (\exists x \in \mathbb{R}); x^2 - xy + y^2 = 0$$

$$S: (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$T: \forall (a; b) \in \mathbb{R}^{*2}; \frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0$$

$$R: \left(\exists (x; y; z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z-2}{3}\right)$$

2) Donner la valeur de vérité des propositions  $P$ ;  $Q$ ;  $R$  Et  $S$ .

### EXERCICE 03

raisonnement par contre-exemple

Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

$$P: (\forall x \in ]0; 1[) \frac{2x}{x^2(1-x^2)} < 1$$

$$Q: (\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) x + y \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$R: (\forall x \in \mathbb{R}) 3\cos x \neq 2\sin^2 x$$

$$S: (\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}); \frac{4xy}{4+y^2} > 1$$

$$T: (\forall x \in \mathbb{R}^*) x + \frac{1}{x} \geq 2$$

### EXERCICE 04

raisonnement par disjonction des cas

1) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{2x^2 - 3x + 3} - x + 1 > 0$$

2) Montrer que le nombre  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 6 pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3) a- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$(E): \sqrt{x^2 + x + 3} = 2x - 1$$

b- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :

$$(I): \sqrt{x^2 + x + 3} \geq 2x - 1$$

4) On considère la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + x - 2$$

a- Déterminer  $D_f$ .

b- Déterminer le tableau des signes de la fonction  $f$

5) Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$ .

6) Soit  $a$ ;  $b$  et  $c$  trois réels tels que  $c$  est positif.

$$\left(\frac{|a-b|}{2} + \frac{|a+b|}{2}\right) < c \Rightarrow (|a| < c \text{ et } |b| < c)$$

### EXERCICE 05

raisonnement par contraposée

Montrer que :

1) pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  :

$$(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}\right)$$

2) pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  et  $z$  :

$$x + y > z \Rightarrow (x > z \text{ ou } y > z)$$

3)  $(\forall x \in [2, +\infty[) (\forall y \in [3, +\infty[)$  :

$(x \neq 11 \text{ ou } y \neq 28)$

$$\Rightarrow x + y - 6\sqrt{x-2} - 10\sqrt{y-3} + 29 \neq 0$$

4)  $(\forall x \in \mathbb{R}); (x \notin [-1; 4] \Rightarrow x^2 - 3x - 4 > 0)$

5)  $\forall (x; y) \in (]1; +\infty[)^2; x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$

6) soit  $a \in \mathbb{R}$ . Prouver que :

$$[(\forall \varepsilon > 0) |a| < \varepsilon] \Rightarrow a = 0$$

7) Soit  $(a; b; c) \in (\mathbb{R}^+)^3$ . Montrer que :

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \neq \frac{1}{abc}$$

8)  $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} \neq y + \sqrt{y^2 + 1}$

### EXERCICE 06

raisonnement par absurde

- 1) Montrer que  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$  sachant que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .  
 2) Soient  $a$  et  $b$  deux nombres rationnels tels que  $a \neq b$   
 Montrer que :

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \notin \mathbb{Q}$$

- 3) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$$

- 4) Soit  $n$  un entier naturel.

a-Déterminer les restes de la division euclidienne de  $n^2$  par 5.

b-Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N})\sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$

- 5) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

a-  $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \notin \mathbb{N}$ .

b-  $\sqrt{n^2 + 7n + 12} \notin \mathbb{N}$

c-  $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$ .

- 6) soit  $a \in \mathbb{N}$ . Montre que :

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + 8a + 3}}} \notin \mathbb{N}$$

### EXERCICE 07

raisonnement par récurrence

Montrer que :

- 1)  $(\forall n \in \mathbb{N})$ :

$$1 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^n = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

- 2)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- 3)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

- 4)  $(\forall n \in \mathbb{N})$  : « 17 divise  $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$  »

- 5)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  :

«  $10^{3n+2} + 10^{3n+1} + 1$  est divisible par 111 »

- 6)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  :

«  $4^{n+1} + 3^{2n+1} - 2(-1)^n$  est divisible par 5 »

- 7)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

- 8)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  :

$$\left(1 + \frac{1}{1^3}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n}$$

- 9)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  :

$$\frac{3n}{2n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

- 10)  $(\forall n \in \mathbb{N}) : (1+x)^n \geq 1+nx$  (inégalité de Bernoulli).

- 11)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

- 12)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

- 13)  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$$

### EXERCICE 08

raisonnement par équivalences

- 1) Soient  $a, b$  et  $c$  des réels.

Montrer que  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

- 2) Montrer que :  $(a^3 + a = b^3 + b) \Leftrightarrow a = b$

- 3) Soit  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x}$$

- 4) soit  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ .

Montrer que si  $x \geq 1$  et  $y \geq 4$  alors :

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow (x=2 \text{ et } y=8)$$

- 5) Montrer que pour tout  $x$  et  $y$  de  $]1; +\infty[$  :

$$(x+y) + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} > 2$$

- 6) Soit  $x, y$  et  $z$  trois réels strictement positifs. Montrer que :

$$xy\sqrt{z} < xz\sqrt{y} < yz\sqrt{x} \Leftrightarrow x < y < z$$

- 7) Soit  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que

$$(x+y)(x-y)^2 < 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 > 4(x^3 + y^3)$$

### EXERCICE 09

raisonnement par implication

Soit  $a, b$  deux réels.

- 1) Montrer l'implication suivant :

$$(|a| < 1 \text{ et } |b| < 1) \Rightarrow |a+b| < |1+ab|$$

- 2) a-Vérifier que :  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

b-Montrer que :

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow |a+b| \leq \sqrt{2}$$

- 3) a- Montrer que :

$$(\forall a \in ]1; +\infty[) \frac{a^2}{a-1} \geq 4$$

b-En déduire que pour tout  $a$  et  $b$  de  $]1; +\infty[$  :

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$$

- 4) a-Montrer que :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2; |a+b| = |a| + |b| \Rightarrow ab \geq 0$$

