المستوى: الثانية علوم رياضية	الإمتحان التجريبي الثاني:	المجمع التربوي علال عواد
الاستاذ : م. ادير	4 Heures	سلا بطانة

الخميس 24 مارس 2016

$\frac{1}{4}$

س-ت

التمرين الأول: (4,75 نقط)

نذكر أن $\left(M_2\left(IR\right),+,\times\right)$ حلقة واحدية و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

نعتبر المجموعة : $\mathrm{E}=\left\{M_{(a,b)}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0,75 — 1- بين أن : $(\mathrm{E},+)$ زمرة تبادلية.

0,5 — 2- بين أن : E جزء مستقر في $\left(M_2\left(IR\right),\times\right)$.

3- نعتبر التطبيق f حيث : $\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \longrightarrow E \\ a+ib & \longrightarrow M_{(a,b)} \end{aligned}$

0,5 — أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathrm{E},\times)$.

0,5 — ب- استنتج أن: $(\mathrm{E}-\{O_2\},\times)$ زمرة تبادلية حيث $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

0,75 — ت- بين أن: $(\mathrm{E},+,\times)$ جسم تبادلي.

0,75 — ث- حدد $M^n_{(\sqrt{2},\sqrt{2})}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1 — ج- حل في E المعادلة : $X^5=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

التمرين الثاني: (4,25 نقط)

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): z^2-az+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ حيث a عدد عقدي .

و ليكن z_0 و z_1 حلي المعادلة (E)

0,75 — 1- بين أن : $|z_0|\times|z_1|=1$ و أن $\arg(z_0)+\arg(z_1)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

2- نضع $z_0=e^{i\theta}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$.

0,75 — أ- بين أن : $a=2\cos(\theta-\frac{\pi}{6})e^{i\frac{\pi}{6}}$

0,75 — ب- استنتج أنه إذا كان $z_0=i$ فإن : $1+ia-a^2-ia^3+a^4+ia^5=0$

المجمع التربوي علال عواد سلا بطانة	**الإمتحان التجريبي الثاني:**	المستوى: الثانية علوم رياضية الاستاذ : م. ادير

3- نفترض أن : $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ حدد العدد z_1 على شكليه المثلثي و الجبري

أ- ثم استنتج قيمتي , $\cos(\frac{\pi}{12})$ و $\sin(\frac{\pi}{12})$. — 1

ب- اكتب العدد a على شكليه المثلثي و الجبري. — 1

مسألة : (21 نقطة)

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

و (C_f) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الجزء الأول:

1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ — 0,75

ب – ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) — 0,5

2- احسب $f'(x)$ لكل $x \in]-1,+\infty[$ ‘ثم ضع جدول تغيرات f — 1

3- أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين 0 و α بحيث $\alpha > 1$. — 0,5

أ- استنتج إشارة $f(x)$. — 0,5

4- انشئ المنحنى (C_f) . — 0,75

5- ليكن λ من المجال $]-1,0[$

أ- احسب بدلالة λ كل من التكاملين : $L_1 = \int_0^{\lambda} \frac{x}{x+1}dx$ و $L_2 = \int_0^{\lambda} \ln(1+x)dx$ — 1

ب- استنتج أن مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = \lambda$ و $x = 0$ هي : $A(\lambda) = 3\lambda - (3+\lambda)\ln(1+\lambda)$ — 0,5

ت- احسب $\lim\limits_{\lambda\to-1^+} A(\lambda)$ — 0,25

6- ليكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq 4$

أ- بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0,1[$. — 0,5

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq4}$. — 0,5

ت- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq4}$ متقاربة ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. — 0,5

المستوى: الثانية علوم رياضية الاستاذ : م. ادير	**الإمتحان التجريبي الثاني:**	المجمع التربوي علال عواد سلا بطانة

الجزء الثاني:

$\frac{3}{4}$

نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{\ln(1+t^2)}{t} & ; t \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

1- أ- تحقق أن الدالة φ فردية . 0,5

ب- ادرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة φ في 0. 0,75

2- أ- بين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}^*) : \varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2} f(t^2)$ 0,5

ب – استنتج جدول تغيرات الدالة φ . 0,5

3- استنتج إشارة $\varphi(t)$ 0,5

الجزء الثالث:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$

1- بين أن الدالة g زوجية. 0,5

2- ليكن $x \in [1,+\infty[$

أ- احسب التكامل التالي : $I=\int_1^x \frac{2}{t}\ln(t)dt$ 0,5

ب- استنتج أن : $g(x) - g(1) = \ln^2(x) + \int_1^x \frac{1}{t}\ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ 0,5

3- أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $(\forall x \geq 0) : \ln(1+x) \leq x$ 0,5

ب – استنتج أن : $(\forall x \geq 1) : 0 \leq \int_1^x \frac{1}{t}\ln(1+\frac{1}{t^2})dt \leq \frac{1}{2}$ 0,5

4- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ ثم أول النتيجة هندسيا. 1

5- أ- بين أن g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم احسب $g'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}$. 0,5

ب – ضع جدول تغيرات الدالة g. 0,5

ج – انشىء منحنى الدالة g في م.م.م مبرزا المماس في النقطة التي افصولها 0 . 0,75

الجزء الرابع:

نعتبر المتتالية $(s_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{k})$ 0,5

المجمع التربوي علال عواد سلا بطانة	**الإمتحان التجريبي الثاني:**	المستوى: الثانية علوم رياضية الاستاذ : م. ادير

$\frac{4}{4}$

1- بين أن : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) : \ln(1+k) - \ln(k) < \frac{1}{k}$ **1**

2- استنتج أن : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) : 2\ln(k+2) - 3\ln(k+1) + \ln(k) < f(\frac{1}{k})$ و أن :

$(\forall k \in \mathbb{N}^*) : 2\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) < f(\frac{1}{k})$. **1**

3- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln\left(\frac{(n+2)^2}{4(n+1)}\right) < s_n$ ثم احسب $\lim_{n} s_n$ **0,5**

الجزء الخامس:

ليكن $x \in]0,1[$

1- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$. **0,5**

2- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$ **0,75**

3- استنتج أن : $f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{2k-1}{k} x^k + 2(-1)^{n+1} \frac{x^{n+2}}{1+x} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$ **0,5**

4- أ- بين أن : $0 \le \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \le x^{n+2}$. **0,5**

ب – استنتج أن : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = 0$. **0,5**

ج – بين أن : $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2k-1}{k} x^k \right)$

بالتوفيق