Centre de formation des Inspecteurs-Rabat
Bac Sc. Mathématiques 2013-2014

Proposé par : Ahmed SANI [1]
email : ahmedsani82@gmail.com
à télécharger sur :http ://www.sanimaths.com

Nous proposons un corrigé sommaire de l'épreuve en mettant l'accent sur les quelques impuretés qui l'ont marqué mais et surtout sur ses points forts concernant son respect des cadres de référence, sa couverture réussie des notions principales enseignées à ce stade et les niveaux d'habileté tels quels sont prescrits par les circulaires et notes régissant les examens certifiants. Nous terminons, comme d'habitude, par une réflexion didactique sur l'épreuve.

Exercice 1 (Arithmétique).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n = \underbrace{33...3}1$ où le nombre 3 est répété exactement n fois.

1. $a_1 = 31$ et $a_2 = 331$. Il est facile de vérifier leur primalité (pour a_2, on teste la divisibilité par les nombres premiers jusqu'$\grave{a}$ 17 vu que $\sqrt{331} \approx 18,2$).
2. Nous procédons par recurrence. Pour $n = 1$, la propriété est évidente. Supposons que pour $n \geq 1$, on ait $3a_n + 7 = 10^{n+1}$. On remarque $a_{n+1} = 3.10^{n+1} + a_n$. Ceci permet d'écrire : $3a_{n+1} + 7 = 9.10^{n+1} + 3a_n + 7$. On applique l'hypoth$\grave{e}$se de recurrence au dernier terme de cette égalité et l'on obtient : $3a_{n+1} + 7 = 9.10^{n+1} + 10^{n+1} = 10^{n+2}$. Ceci prouve que la propriété est héréditaire et on conclut qu'elle est vraie pour toute valeur de l'entier $n \geq 1$.
3. 31 étant un nombre premier, on peut appliquer le petit théor$\grave{e}$me de Fermat. Autrement dit, pour tout entier $b \neq 0[31]$, on a $b^{30} \equiv 1[31]$. C'est le cas pour $b = 10$. Ainsi, $10^{30} \equiv 1[31]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv (10^{30})^k 10^2 \equiv 100 \equiv 7[31]$.
4. D'une part, d'aprés la question 2, on a $3a_{30k+1} \equiv 10^{30k+2} - 7[31]$, et selon la question précédente, ce dernier terme est nul modulo 31. D'autre part, l'égalité $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$ affirme que 31 divise $3a_{30k+1}$. Mais $31 \wedge 3 = 1$, donc d'aprés le théor$\grave{e}$me de Gauss 31 divise a_{30k+1}.
5. La dernière question assure l'existence d'un entier λ tel que $a_{30k+1} = 31\lambda$. Par suite l'on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} a_n + 31y = 1 &\iff 31\lambda x + 31y = 1 \\ &\iff 31(\lambda x + y) = 1 \\ &\implies 31h = 1 \text{ avec } h \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

   Ceci est absurde car il est équivalent $\grave{a}$ dire que 31 divise l'unité.

1. Mes remerciements $\grave{a}$ Monsieur M.Iaalou pour la publication de cette modeste contribution sur son site *riadyate.net*

Exercice 2 (Structures).

Nous rappelons que $E = \{M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et que la matrice identité est notée I et la matrice nulle $0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$ est notée O.

1. Soient $M(a,b)$ et $M(x,y)$ deux éléments de E. (E est évidemment non vide car il contient $O = M(0,0)$) Un calcul simple montre que $M(a,b) - M(x,y) = M(a-x, b-y) \in E$. Par suite E est bien un sous groupe de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On a $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque $J = M(1,0)$ appartient *à* E alors que J^2 ne peut se mettre sous la forme $M(x,y)$. En effet si c'était le cas, le syst*è*me
$$\begin{cases} x = 1 \qquad \text{et} \quad y = 0 \\ x + y = 1, \\ x - y = 2, \end{cases}$$
serait résoluble dans $\mathbb{R}^2$. Il en découle que E ne peut *ê*tre stable par la multiplication.
3. **3.a** Il faut montrer que pour tous complexes $z = a + ib$ et $z' = x + iy$ (écrits sous leur forme algébrique) l'égalité $\phi(zz') = \phi(z) * \phi(z')$ a lieu. Ainsi, d'une part on a :
$$\begin{aligned} \phi(zz') =& \quad \phi((a+ib)(x+iy)) \\ \phi(zz') =& \quad \phi(ax - by + i(ay + bx)) \\ \phi(zz') =& \quad M(ax - by; ay + bx) \end{aligned}$$
et d'autre part
$$\begin{aligned} \phi(z) * \phi(z') =& \quad M(a;b) \times N \times M(x;y) \\ \phi(z) * \phi(z') =& \quad \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & x-y \\ y & x+y \end{pmatrix} \\ \phi(z) * \phi(z') =& \quad M(ax - by; ay + bx) \end{aligned}$$

   3.b Si $z = a + ib \neq 0$ alors $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Donc $M(a,b) \neq O_{M_n(\mathbb{R})}$; c-a-d $\phi(\mathbb{C}) \subset E^*$. Inversement, si $O \neq M(a,b) \in M_n(\mathbb{R})$, alors $a \neq 0$ ou $b \neq 0$; par suite $z = a + ib \neq 0$. Ce qui prouve l'égalité $\phi(\mathbb{C}) = E^*$

   3.c ϕ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*; \times)$ dans $(M_2(\mathbb{R}); *)$. Donc $(\phi(\mathbb{C}); *)$ a la *m*ême structure que $(\mathbb{C}^*; \times)$. Or ce dernier est un groupe multiplicatif et $\phi(\mathbb{C}^*) = E^*$ (d'aprés la question précédente) donc $(E^*; *)$ est bien un groupe. Comme de plus la loi $\times$ est commutative dans $\mathbb{C}^*$, alors $(E^*;*)$ est bien un groupe Abelien.

4. Soient $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ et $C(c_1,c_2)$ trois éléments de E. Il est facile de voir que $A*(B+C) = A\times N\times(B+C)$. les propriétés de distributivité bien connues dans $M_2(\mathbb{R})$ donnent :
$$A*(B+C) = A\times N\times(B+C) = A\times N\times B + A\times N\times C = A*B + A*C.$$

5. Récapitulons : $(E^*;+)$ est un groupe commutatif comme sous groupe de $M_2(\mathbb{R})$.(voir question 1). La deuxième loi $*$ est distributive par rapport $\grave{a}$ l'addition + (D'aprés 4). Donc $(E^*;+;*)$ est un anneau. Ce dernier est unitaire d'unité triviale N^{-1}, et est commutatif car $(\mathbb{C};*)$ l'est puisque ϕ est un morphisme. Puisque $(E^*;*)$ est groupe, alors l'anneau $(E^*;+;*)$ est bien un corps.

Exercice 3 (Calcul complexe)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}] - \{\frac{\pi}{4}\}$.

1. **a** $\Delta = (\sqrt{2}e^{i\theta})^2 - 4e^{2i\theta} = -2e^{2i\theta} = i^2\sqrt{2}^2(e^{i\theta})^2 = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$.

   b $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}e^{i\theta} - \sqrt{2}ie^{i\theta}) = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}}{2}\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}$. Un calcul similaire aboutit, aprés simplification, à : $z_2 = e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$

2. Pour chacun des deux points $T_i, i\in\{1,2\}$, nous noterons z_i l'affixe correspondant.

   2.a Calculons $\frac{z_2-z_1}{z_A-z_O} = \frac{z_2-z_1}{z_A}$. L'on a
$$\frac{z_2-z_1}{z_A} = \frac{e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} \tag{1}$$
$$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \tag{2}$$
$$= -i \tag{3}$$

   Le passage de (1) à (2) se fait aprés factorisation par $e^{i\theta}$, tandis que le passage de (2) à (3) est garanti par la formule d'Euler : $\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-ix} - e^{ix} = -2i\sin(x)$. Ce calcul donne $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{T_1T_2}}) = \arg\frac{z_2-z_1}{z_A} = \arg(-i) = \frac{-\pi}{2}$. Ce qui affirme la perpendicularité des droites (OA) et (T_1T_2).

2.b Comme ci avant, calculons $\frac{z_K - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_K}{z_A}$:

$$\begin{aligned}\frac{z_K}{z_A} &= \frac{e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{2}e^{i\theta}} \\ &= \frac{2cos\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{2}} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Cela suffit pour affirmer que les trois points O, A et K sont bien alignés.

2.c D'aprés les deux questions précédentes, la droite (OA) passe par K milieu du segment $[T_1, T_2]$ et $(OA) \perp (T_1 T_2)$. Par suite, (OA) est bien la médiatrice de $[T_1, T_2]$.

3. Soit r la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3.a Si $r(M) = M'$ avec $z_M = z$ et $z_{M'} = z'$, alors $z' - z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_1)$. Soit :$z' = e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} + e^{i\frac{\pi}{2}}(z - e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})})$

3.b Notons z_B l'affixe de B image de I par la rotation r. Alors $z_B = e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} + e^{i\frac{\pi}{2}}(1 - e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})})$; ce qui est équivalent à $z_B = e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} + e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$ ou encore à $z_B = i + e^{i\theta}(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{-\pi}{4}}) = i + \sqrt{2}e^{i\theta}$ (utiliser formule d'Euler).

3.c L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = i$ et celle du veteur $\overrightarrow{IJ}$ est $z_J - z_I = -2$. Donc $\overrightarrow{AB}$ dirige l'axe des imaginaires purs $(O, \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{IJ}$ dirige l'axe réel $(O, \overrightarrow{u})$. La perpendicularité de (IJ) et (AB) résulte de l'orthogonalité du repère.

4. On a $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{v}$ donc $z_C - z_A = -i$ donc $z_C = z_A - i = \sqrt{2}e^{i\theta} - i$.

5. $z_B + z_C = i + \sqrt{2}e^{i\theta} + \sqrt{2}e^{i\theta} - i = 2\sqrt{2}e^{i\theta} = 2z_A$. Autrement écrit : $z_A = \frac{z_B + z_C}{2}$. C'est une traduction complexe du fait que A est bien le milieu de $[BC]$.

Exercice 4 : Analyse I

Partie I

Soit f la fonction défini par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-x\ln(x)}{1+x^2} & \text{; x>0} \\ f(0) = 0, \end{cases}$

1. **1.a** Les applications $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$ sont continues pour tout $x > 0$. Donc f est continue sur $]0, +\infty[$. En zero, on a : $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$, par suite $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, d'où la continuité de f sur $[0, +\infty[$.

   1.b Il est facile de voir que le signe de $f(x)$ est celui de $-\ln(x)$ car $\forall x \geq 0$, on a : $\frac{x}{1+x^2} \geq 0$. Résumons ainsi le signe de f : $\begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ f(x) < 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors :

2.a

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{x}) &= \frac{-1/x\ln(1/x)}{1+1/x^2} \\ &= \frac{1/x\ln x}{\frac{x^2+1}{x^2}} \\ &= \frac{x\ln x}{1+x^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

2.b A l'instar du raisonnement amené à la question précédente, on démontre la dérivabilité de f sur $]0,+\infty[$ comme composée et rapport de fonctions trivialement dérivables.

2.c On a : $f(0) = f(1) = 0$, f est continue sur $[0,1]$ et est dérivable sur $]0,1[$. On peut donc appliquer le Théorème de *Rolle* qui assure l'existence d'un réel $\alpha \in]0,1[$ vérifiant $f'(\alpha) = 0$

2.d La question 2.a montre que pour tout rél $x > 0$: $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$. Donc $\frac{-1}{x^2}f'(\frac{1}{x}) = -f'(x)$. Par suite $f'(\frac{1}{\alpha}) = \alpha^2 f'(\alpha) = 0$. La dérivabilité de $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ est facile à établir par composition.

Partie II

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ définie sur $[0,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_F$ sa courbe dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. **1.a** On a $t^2 < t^2+1$, donc $\frac{t^2}{t^2+1} < 1$ et comme $1 \le t \Rightarrow 1 \le t^2$, il suffira d'ajouter t^2 aux deux membres pour obtenir : $1+t^2 \le 2t^2$. On divise ensuite par $2(1+t^2)$ et l' on aboutit à l'inégalité :

$$\forall t \in [0,+\infty[: \ \frac{1}{2} \le \frac{t^2}{1+t^2} \le 1 \tag{4}$$

1.b Soit $x > 1$. Comme proposé par l'énoncé, on remarque que : $F(x) = F(1) - \int_1^x \frac{t^2}{t^2+1}\frac{\ln t}{t}dt$. On alors, vu l'inégalité (4), que :

$$F(1) - \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt \le F(x) = F(1) - \int_1^x \frac{t^2}{t^2+1}\frac{\ln t}{t}dt \le F(1) - \int_1^x \frac{1}{2}\frac{\ln t}{t}dt$$

Il suffit pour conclure de voire que : $\int_1^x \frac{\ln t}{t} = \int_1^x (\ln t)'(\ln t)dt = [\frac{1}{2}(\ln t)^2]_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$, qui donne immédiatement :

$$F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \le F(x) = F(1) - \int_1^x \frac{t^2}{t^2+1}\frac{\ln t}{t}dt \le F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2 \tag{5}$$

1.c D'une part dans le second membre de l'inégalié (5) on a : $\lim_{x\to\infty} F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2 = -\infty$ donc par domination, $\lim_{x\to\infty} F(x) = -\infty$. D'autre part, $\lim_{x\to\infty} \frac{F(1)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$, donc $\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$. Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathscr{C}_F$ de F admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses.

2. **2.a** la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, donc F est dérivable sur le même intervalle et l'on a : $\forall x \in [0,+\infty[: F'(x) = f(x)$.

   2.b D'aprés (1.b), f (donc F') est positive sur $[0,1]$ et est négative sur $[1,+\infty[$. Par suite, F est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. On résume les variations dans le tableau suivant :

x	0........1.........∞
f(x)	0↗ F(1)↘ -∞

Partie III :

1. **1.a** On considère l'application :$h: \; t \mapsto -t\ln t$. La fonction h est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $h'(x) = -\ln t - 1$. Cette dérivée s'annule au point $t_0 = \frac{1}{e}$. Comme $h''(x) \leq 0$, il s'agit en fait d'un maximum de h. En remarquant que $h(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$, l'inégalité demandée en découle.

   1.b Pour tout $1 \geq x > 0$, on a $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ et $-x\ln x \geq 0$ donc $f(x) = \frac{-x\ln x}{1+x^2} \leq -x\ln x \leq \frac{1}{e}$ et ce d'aprés la question précédente. Pour $x > 1$, $f(x) \leq 0 < \frac{1}{e}$.

   1.c L'on a : $f(t) \leq \frac{1}{e} \Longrightarrow \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x \frac{1}{e}dt$. Ce qui veut dire $F(x) \leq \frac{1}{e}x < x$ car $\frac{1}{e} < 1$.

2. **1.a** Procédons par recurrence.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, par hypothèse $u_0 \in]0,1[$.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \in]0,1[$. Montrons que $u_{n+1} \in]0,1[$. L'on a$u_{n+1} = F(u_n)$. Mais $F(x) < x$, donc $\forall n \in \mathbb{N} : \; F(u_n) < u_n < 1$ par hypothèse. L'inégalité $0 < u_n$ provient de la positivité de F sur $]0,1[$ comme on peut le voire aisément en se réferant à la question 2.b de la **partie II.**

   1.b $\forall x \in [0,1], \; F(x) \in [0,1]$ et pour tout $x \in [0,1] : \; F(x) < x$ donc $F(u_n) < u_n$ c'est à die $u_{n+1} < u_n$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée, donc elle est convergente.

   1.c La fonction est continue sur $I = [0,1]$ et $F(I) \subset I$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ étant définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ donc, puisqu'elle est convergente, sa limite l est solution de l'éauation : $F(x) = x$. Or $\forall x \in]0,1[\; F(x) < x$, donc les deux seules solutions possibles sont : $l = 0$ ou $l = 1$. La décroissance de F entraine $l = 0$.

1 Exercice 5 :Analyse II

Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} & \text{si x>0} \\ g(0) = 0, \end{cases}$

1. Sur $]0,+\infty[$, la fonction g se présente comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et en particulier $]0,+\infty[$. Le problème réside donc en zéro. On effectue alors le changement $t = \frac{1}{x}$ pour voire que : $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to -\infty} -t^2e^t = 0 = g(0)$. D'où la continuité de g sur $\mathbb{R}^+$.
2. On a $L(x) = \int_0^x g(t)dt$.

   2.a Comme g est continue sur $J = [0,\infty[$, alors L est dérivable sur J. En particulier, elle est continue sue cet intervalle.

   2.b Posons $u(x) = -\frac{1}{x}$, définie pour tout $x > 0$. Alors $u'(x) = \frac{1}{x^2}$. On remarque ensuite que pour tout $x > 0$ on a : $L(x) = \int_0^x u'(t)e^{u(t)}dt = L(\alpha)+\int_\alpha^x u'(t)e^{u(t)}dt$. Autrement dit : $L(x) = L(\alpha) + [e^{u(t)}]_\alpha^x = L(\alpha) + e^{u(x)} - e^{u(\alpha)} = L(\alpha) + e^{\frac{-1}{x}} - e^{-1/\alpha}$.Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, la continuité de F et la limite évidente $\lim_{\alpha\to 0} e^{-1/\alpha} = 0$ entrainent que

   $$L(x) = \lim_{\alpha\to 0^+} L(\alpha) + e^{\frac{-1}{x}} - e^{-1/\alpha} = L(0) + e^{\frac{-1}{x}}.$$

   2.c D'une part L est continue, d'aprés la question 2.a de la partie courante, donc $\lim_{x\to 0} L(x) = L(0)$. D'autre part, soit G une primitive quelconque de g sur $\mathbb{R}^+$ (qui existe car g est continue). Alors $L(x) = G(x) - G(0)$ et G en tant que primitive de g est évidemment continue sur $[0,+\infty[$. La continuité de G en zéro donne

   $$\lim_{x\to 0} L(x) = \lim_{x\to 0} G(x) - G(0) = 0.$$

   Enfin, comme il était facile de le voire dés le début de cette partie $L(0) = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n})$. Il s'agit en fait d'une somme de Riemann de l'application g. En fait, on peut écrire :

   $$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(0 + \frac{k(1-0)}{n}).$$

   Sous cette forme, on reconnait la limite de la suite $(s_n)_n$ comme moyenne integrale de g sur $[0,1]$:

   $$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 g(t)dt = L(1)$$

Remarque 1 :
Cette dernière partie présente l'unique embarras lié à une attente incomprise de la part des élèves. La valeur de L en zéro est à ce niveau une question qui ne doit pas faire objet d'aucun questionnement. En effet, vu que les instructions officielles restreignent la définition de l'Integrale aux seules fonctions continues sur un segment $[a, b]$, la valeur de la fonction $M : x \mapsto \int_a^b m(t)dt$ au point a est trivialement nulle dés que m désigne une fonction continue sur $[a, b]$.

Remarque 2 :
L'absence d'une question demandant de tracer la courbe représentative d'une fonction est une première. Il est normal qu'un examen certifiant soit principalement axé sur les fonctions sans demander une construction graphique ; mais l'absence d'une courbe comme donnée, ou à tracer à l'aide d'une calculette suscite une profonde question. En tous cas, ceci fera objet d'une analyse didactique profonde annexée à ce document.

2 Analyse didactique :

Abou Adam