الحساب التكاملي

أهداف الدرس

➢ التمكن من معرفة تكامل دالة متصلة ➢ التعرف على خاصيات التكامل ➢ توظيف الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية في حساب تكامل ➢ استعمال المكاملة بالأجزاء	➢ توظيف التكامل في حساب المساحات ➢ توظيف التكامل في حساب الحجوم ➢ توظيف التكامل في مفاهيم أخرى(المتتاليات مثلا) ➢ توظيف الحساب التكاملي في مواد أخرى ➢ توظيف الحساب التكاملي في الحياة اليومية

القدرات المنتظرة

- ➢ التمكن من معرفة تكامل دالة متصلة
- ➢ التمكن من حساب مساحة حيز المستوي المحصور بين منحنين
- ➢ التمكن من حساب حجم المجسم المولد بدوران منحنى دالة حول محور الأفاصيل

الامتدادات

- ❖ الإحصاء و الاحتمالات
- ❖ العلوم الفيزياء و الكيمياء
- ❖ العلوم الاقتصادية

فقرات الدرس

- ➢ تكامل دالة متصلة على قطعة
- ➢ علاقة شال ـ خطانية التكامل
- ➢ التكامل و الترتيب
- ➢ القيمة المتوسطة
- ➢ بعض تقنيات حساب التكامل
- ➢ حساب المساحات و الحجوم

I)- تكامل دالة متصلة على قطعة Intégrale d'une fonction continue sur un segment

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و F و G دالتين أصليتين للدالة f على المجال $[a,b]$

لدينا: $\forall x\in[a,b], G(x)=F(x)+c, c\in\mathbb{R}$ ولدينا: $G(b)-G(a)=F(b)-F(a)$

إذن العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ غير مرتبط بالدالة الأصلية F

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$، و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a,b]$

العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ يسمى تكامل الدالة f من a إلى b و نرمز له بالرمز: $\int_a^b f(x)dx$

و يقرأ: تكامل من a إلى b لـ $f(x)dx$ ، أو أيضا مجموع $f(x)dx$ a إلى b.

أمثلة

أحسب التكاملات التالية

- $I=\int_1^{e^2}\frac{dx}{x}$ • $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx$ • $K=\int_1^2\frac{dx}{x^2}$
- $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2}dx$ • $M=\int_1^{\ln 2}e^{\frac{1}{2}t}dt$ • $N=\int_1^e\frac{\ln t}{t}dt$

ملاحظة

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I، و a و b و c عناصر من I و $k\in\mathbb{R}$، لدينا:

- علاقة شال: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
- الخطانية: $\int_a^b (f+g)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ و $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx=0$ • $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

ملاحظة

$$\forall k\in\mathbb{R}, \int_a^b kdx=\int_a^b[kx]_a^b=k(b-a)$$

أمثلة

أحسب التكاملات التالية:

- $J=\int_0^2|x-1|dx$ • $J=\int_0^{\pi}|\sin x|dx$ • $K=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}|e^x-1|dx$

تمرين

نعتبر التكاملين I و J بحيث: $I=\int_0^1(\cos^2 t)dt$ و $I=\int_0^1(\sin^2 t)dt$

1)- أحسب $I+J$ و $I-J$

2)- استنتج قيمة كل من التكاملين I و J

II)- التكامل و الترتيب Intégrales et ordre

خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I، و a و b عنصرين من I، لدينا:

- إذا كان $a \le b$ و f موجبة على $[a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$
- إذا كان $a \le b$ و $\forall x \in [a,b], f(x) \le g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

أمثلة

- لدينا : $\forall x \in [1,e], \ln x \ge 0$، إذن $\int_1^e \ln x dx \ge 0$
- $\int_0^1 (\sin^2 t) e^t dt \ge 0$
- لدينا : $\forall t \in [0,1], 0 \le \frac{1}{1+t^2} \le 1$، إذن $\int_0^1 0dx \le \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \le \int_0^1 1dx$ و منه $0 \le \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \le 1$

تمرين

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n>0}$ المعرفة بما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$

1)-أ- أحسب u_1

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ تناقصية

ج- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n>0}$ متقاربة

2)-ا- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$

ب- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n>0}$.

III)- القيمة المتوسطة La valeur moyenne

خاصية و تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I، و a و b عنصرين من I بحيث $a < b$، لدينا:

- يوجد على الأقل عنصر c من المجال $[a,b]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
- العدد الحقيقي $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a,b]$

IV)- بعض تقنيات حساب التكامل

1)- استعمال الدوال الأصلية

أمثلة

أحسب التكاملات التالية

- $I = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right)dt$
- $J = \int_1^e \frac{\ln^3 t}{t}dt$
- $K = \int_1^6 \sqrt{x+3}dx$
- $L = \int_5^{10} \left(\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)dx$
- $M = \int_0^1 te^{t^2}dt$
- $N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt$

1)- المكاملة بالأجزاء

خاصية

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a,b]$ بحيث الدالتان u' و v' متصلتان على $[a,b]$.

لدينا: $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

هذه الصيغة تسمى المكاملة بالجزاء.

أمثلة

أحسب التكاملات التالية

- $I = \int_0^{\pi} t\sin t dt$
- $J = \int_1^{e} (2t-1)e^{2t}dt$
- $K = \int_1^{\ln 2} (x-1)e^{x}dx$
- $L = \int_0^{1} \ln(x+1)dx$
- $M = \int_0^{1} te^{t}dt$
- $N = \int_1^{e} \frac{\ln t}{t^2}dt$

V)- حساب المساحات و الحجوم

1)- حساب المساحات

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

وحدة قياس المساحات هي $\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$ و نرمز لها بالرمز $u.a$.

خاصية1

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$

لتكن A مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=a$ و $x=b$.

- إذا كانت f موجبة على $[a,b]$ فإن $A = \int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات.
- إذا كانت f سالبة على $[a,b]$ فإن $A = -\int_a^b f(x)dx$ بوحدة قياس المساحات.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{2}{x}$

1)- أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

2)- أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=1$ و $x=e$.

ملاحظة

- إذا كان $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$ فإن وحدة قياس المساحات هي $1cm^2$

خاصية2

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$،لدينا:

مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=a$ و $x=b$ هي العدد الحقيقي الموجب:

$A = \int_a^b |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحات.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-1$

1)- أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

2)- أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=0$ و $x=2$.

خاصية3

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a,b]$،لدينا:

مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) منحنى الدالة f و (C_g) منحنى الدالة g و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=a$ و $x=b$ هي العدد الحقيقي الموجب $A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ بوحدة قياس المساحات.

مثال

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x)=\frac{1}{x}$ و $f(x)=x^2$

1)- أرسم (C_f) و (C_f) في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

2)- أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$.

2)- حساب الحجوم

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، وحدة قياس الحجوم هي $u.v=\|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\|$

خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$،بحيث $a<b$.

حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f حول محور الأفاصيل هو $V=\int_a^b \pi(f(x))^2 dx$ بوحدة قياس الحجوم

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,\pi]$ بما يلي : $f(x)=\sin x$

1)- أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2)- أحسب حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f حول محور الأفاصيل