2 بالك علوم رياضية	فرض محروس رقم 02	ثانوية موسى بن نصير
ذ : عبدالله بن لختير	الدورة الثانية : 2010/2009	نيابة الخميسات

Durée:04heure

- **التمرين رقم 01:** $(02pts)$

ليكن $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، و نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة :

$$(\mathrm{E}): z^2 + z - \frac{1}{2} i\sin(2\theta)e^{2i\theta} = 0 .$$

1)- حدد على الشكل الأسي حلي المعادلة (E) .

2)- المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

و لتكن M و N النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي : $-\cos\theta e^{i\theta}$ و $i\sin\theta e^{i\theta}$.

أ- أحسب المسافة MN ، ثم بين أن المتجهتين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدتان .

ب- إستنتج أنه لما يتغير البارامتر الحقيقي θ على المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ النقطتان M و N تتغيران على دائرة ثابتة (C) ينبغي تحديد شعاعها و لحق مركزها .

ج- حدد قيمة البارامتر θ لكي يكون المثلث OMN متساوي الساقين ، ثم أرسم في هذه الحالة الدائرة (C) و النقطتين M و N .

- **التمرين رقم 02:** $(03pts)$

1)- ليكن (a,b) من $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ بحيث : $a+b=23$.

أ- بين أن a و b أوليان فيما بينهما ($a \wedge b = 1$) .

ب- إستنتج a و b علما أن : $a<b$ و $a \vee b = 126$.

2)- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(\mathrm{E}): 9x - 14y = 1$.

3)- أ- حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $(S): \begin{cases} x \equiv 4\ [9] \\ x \equiv 5\ [14] \end{cases}$.

ب- ليكن x حلا في $\mathbb{Z}$ للنظمة (S) ، حدد باقي القسمة الأقليدية ل x على 126 .

- **التمرين رقم 03:** $(03pts)$

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و نضع : $S_n(t) = 1 + t + t^2 + ... + t^{n-1}$ ، حيث $t \in \mathbb{Z}$ و $t \neq 1$.

1)- بين أن : $t^n + (1-t)S_n(t) = 1$ ، ثم إستنتج $t^n \wedge (1-t)$.

2)- في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، نعتبر المستقيم $\left(D_n\right)$ الذي معادلته : $\left(\mathrm{E}_n\right):3^n x-2y=1$.

أ- باستعمال السؤال **1**)- حدد حلا خاصا للمعادلة $\left(\mathrm{E}_n\right)$ في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

ب- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة $\left(\mathrm{E}_n\right)$.

ج- هل توجد نقط من المستقيم $\left(D_n\right)$ إحداثيتاها صحيحة نسبية و تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها O و شعاعها $r=S_n(3)$ ؟ علل جوابك .

- **التمرين رقم 04**: $\left(04pts\right)$

ليكن $a\in\mathbb{R}^{*+}$ و $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}=1+a+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+...+\frac{a^n}{n!} .$$

1)- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $e^a=1+a+\int_0^a(a-t)e^t dt$.

2)- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $K_n=\frac{1}{n!}\int_0^a(a-t)^n e^t dt$ ، بين أن : $K_n=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+K_{n+1}$.

3)- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+...+\frac{a^n}{n!}+K_n$.

4)- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);0\le K_n\le\frac{a^n}{n!}\left(e^a-1\right)$.

5)- لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع : $\mathrm{v}_n=\frac{a^n}{n!}$.

أ- بين أنه يوجد n_0 من $\mathbb{N}$ بحيث : $(\forall n\in\mathbb{N});n\ge n_0\Rightarrow \mathrm{v}_{n+1}\le\frac{1}{2}\mathrm{v}_n$.

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});n\ge n_0\Rightarrow 0\le \mathrm{v}_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}\mathrm{v}_{n_0}$.

ج- إستنتج النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+a+\frac{a^2}{2!}+...+\frac{a^n}{n!}\right)$.

- **التمرين رقم 05**: $\left(08pts\right)$

← **الجزء الأول**: $\left(04pts\right)$

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(1)=1 \quad \text{و} \quad (\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[);f(x)=\frac{\ln x}{x-1} .$$

1)- أ- بين أن f متصلة على $]0;+\infty[$.

ب- أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ، ثم اعط تأويلهما الهندسي .

2)- ليكن t عنصرا من المجال $]-1;+\infty[$.

أ- بين أن : $\left|\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du\right| \le t^2\left|\ln(1+t)\right|$.

ب- بين أن : $\int_0^t \frac{u^2}{1+u}du = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$.

ج- إستنتج أن f قابلة للإشتقاق في النقطة $x_0 = 1$ و أن : $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

3)- أدرس تغيرات الدالة f ، ثم أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم .

4)- بين أن : $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[);\ f\left(\frac{1}{x}\right) = xf(x)$.

← **الجزء الثاني:** $(04pts)$

لتكن G الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$G(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt; x\neq 0 \text{ و } G(0) = 0 .$$

1)- بين أن الدالة G معرفة على المجال $[0;+\infty[$.

2)- أ- بين أن : $(\forall x \in]0;+\infty[);\frac{2x\ln x}{x+1} \le G(x) \le x\ln x$.

ب- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق الدالة G على اليمين في الصفر .

3)- أ- أحسب النهاية : $\lim_{x\to+\infty} G(x)$.

ب- بين أن : $(\forall u \in]0;1[);G\left(\frac{1}{u}\right) = -\int_u^{u^2}\frac{f(t)}{t}dt$ (إستعمل مكاملة بتغيير المتغير) .

ج- بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x} = 0$ (يمكنك وضع : $u = \frac{1}{x}$ و إستعمال مبرهنة المتوسط) .

4)- نضع : $\mathrm{F}(x) = \int_1^x f(t)dt$ لكل $x \in]0;+\infty[$.

أ- عبر عن $G(x)$ بدلالة $\mathrm{F}(x^2)$ و $\mathrm{F}(x)$ لكل $x \in]0;+\infty[$.

ب- أدرس تغيرات الدالة G على المجال $]0;+\infty[$.

5)- أرسم منحنى G في معلم متعامد و ممنظم (نعطي : $G\left(\frac{1}{3}\right) \simeq -0,4$) .

إنتهى الموضوع .