تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية ، الإمتحان الوطني دورة يونيو 2011

تقديـــم : ذ.العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

===

التمرين الأول :

1)أ- نحل في R المعادلة : $x^2+4x-5=0$.

لتكن S مجموعة حلول المعادلة $x^2+4x-5=0$.

مميز المعادلة هو 36 $\Delta=4^2-4\times(-5)=36$

بما أن $\Delta \succ 0$ فإن المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما :

$$x_1=\frac{-4-\sqrt{36}}{2}=\frac{-4-6}{2}=-5 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-4+\sqrt{36}}{2}=\frac{-4+6}{2}=1$$

ومنه : $S=\{-5\ ,\ 1\}$

ب- نحل في المجال $]0,+\infty[$ المعادلة : $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$. و S مجموعة حلول المعادلة $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$.

$$\begin{aligned} x\in S &\Leftrightarrow \ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)\\ &\Leftrightarrow \ln(x^2+5)=\ln((x+2)\times 2x)\\ &\Leftrightarrow x^2+5=2x^2+4x\\ &\Leftrightarrow x^2+4x-5=0\\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ أو } x=-5 \end{aligned}$$

وبما أن x عنصر من $]0,+\infty[$ فإن $x\in S \Leftrightarrow x=1$

ومنه : $S=\{\,1\,\}$

1) نحل في المجال $]0,+\infty[$ المتراجحة $\ln x+\ln(x+1)\geq \ln(x^2+1)$:

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$. و S مجموعة حلول المتراجحة $\ln x+\ln(x+1)\geq \ln(x^2+1)$:

$$\begin{aligned} x\in S &\Leftrightarrow \ln(x)+\ln(x+1)\geq \ln(x^2+1)\\ &\Leftrightarrow \ln x(x+1)\geq \ln(x^2+1)\\ &\Leftrightarrow \ln(x^2+x)\geq \ln(x^2+1)\\ &\Leftrightarrow x^2+x\geq x^2+1\\ &\Leftrightarrow x\geq 1 \end{aligned}$$

ومنه : $S=[1,+\infty[$

التمرين الثاني :

1) نبين أن : $u_n \succ 0$ لكل n من N

نستعمل الإستدلال بالترجع :

. من أجل n=0 لدينا $u_0 \succ 0$ لأن $u_0=1$.

. ليكن n من N

نفترض أن $u_n \succ 0$. لنبين ان $u_{n+1} \succ 0$.

بما أن $u_n \succ 0$ فإن $8u_n \succ 0$ و $5+u_n \succ 0$

وبالتالي $\frac{u_n}{5+8u_n} \succ 0$ أي $u_{n+1} \succ 0$

. ومنه حسب مبدأ الترجع نستنتج أن $u_n \succ 0$ لكل n من N .

2) أ- نبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 5 :

ليكن n من N .

لدينا : $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + 2 = \dfrac{1}{\dfrac{u_n}{5+8u_n}} + 2 = \dfrac{5+8u_n}{u_n} + 2 = \dfrac{5+10u_n}{u_n} = 5\left(\dfrac{1+2u_n}{u_n}\right) = 5\left(\dfrac{1}{u_n} + 2\right) = 5v_n$

وبالتالي : $v_{n+1} = 5v_n$ لكل n من N

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها 5 .

وحسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا : $v_n = v_0 \times 5^n$ لكل n من N

وحيث أن $v_0 = \dfrac{1}{u_0} + 2 = 1 + 2 = 3$

فإن

$$\boxed{v_n = 3 \times 5^n \text{ لكل } n \text{ من } N .}$$

ب- نبين أن $u_n = \dfrac{1}{3\times 5^n - 2}$ لكل n من N .

ليكن n من N

لدينا : $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 2$ إذن $v_n - 2 = \dfrac{1}{u_n}$ وبالتالي : $u_n = \dfrac{1}{v_n - 2}$

وبما أن : $v_n = 3 \times 5^n$ فإن $u_n = \dfrac{1}{3\times 5^n - 2}$ لكل n من N .

http://www.vrac-coloriages.net

حساب نهاية (u_n) :

لدينا $u_n = \dfrac{1}{3\times 5^n - 2}$ لكل n من N .

وبما أن : $5 \succ 1$ فإن $\lim 5^n = +\infty$

وبالتالي : $\lim(3\times 5^n - 2) = +\infty$

ومنه

$$\boxed{\lim u_n = 0}$$

التمرين الثالث :

1) نحل في C المعادلة : $z^2 - 18z + 82 = 0$:

لتكن S مجموعة حلول المعادلة .

مميز المعادلة هو : $\Delta = (-18)^2 - 4\times 82 = -4$

بما أن $\Delta \prec 0$ فإن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما : $z_1 = \dfrac{18-2i}{2} = 9 - i$ و $z_2 = 9 + i$

ومنه : $S = \{9-i , 9+i\}$

2) أ- نبين أن $\dfrac{c-b}{a-b} = -i$:

لدينا : $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{11-i-9+i}{9+i-9+i} = \dfrac{2}{2i} = \dfrac{-2i}{2} = -i$

ومنه : $\dfrac{c-b}{a-b} = -i$

لدينا : $\frac{c-b}{a-b}=\left[1,\frac{-\pi}{2}\right]$

إذن : $\left|\frac{c-b}{a-b}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\;[2\pi]$

وبالتالي : $\frac{|c-b|}{|a-b|}=1$ و $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\;[2\pi]$

ومنه: $\frac{BC}{BA}=1$ و $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\;[2\pi]$

وبالتالي : $BC=BA$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\;[2\pi]$.

وهذا يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في B .

ب- نعط الشكل المثلثي للعدد $4(1-i)$:

معيار العدد $4(1-i)$ هو $4\sqrt{2}$. لدينا :

$$4(1-i)=4-4i=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{4i}{4\sqrt{2}}\right)=4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

ومنه

الشكل المثلثي للعدد $4(1-i)$ هو $4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$ أي $\left[4\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$

ج- نبين أن : $(c-a)(c-b)=4(1-i)$:

لدينا

$$(c-a)(c-b)=(11-i-9-i)(11-i-9+i)=(2-2i)(2)=4(1-i)$$

استنتاج : لدينا $(c-a)(c-b)=4(1-i)$

إذن : $|(c-a)(c-b)|=|4(1-i)|$

وبالتالي : $|(c-a)||(c-b)|=4\sqrt{2}$ ومنه: $AC\times AB=4\sqrt{2}$.

د- نبين أن : $z'=-iz+10+8i$:

لدينا :

$$R(M)=M'\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-b)+b$$
$$\Leftrightarrow z'=\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)(z-9+i)+9-i$$
$$\Leftrightarrow z'=-i(z-9+i)+9-i$$
$$\Leftrightarrow z'=-iz+9i+1+9-i$$

ومنه : $z'=-iz+10+8i$

نتحقق من أن لحق C’ صورة C بالدوران R هو : $9-3i$.

لدينا : C’ صورة C بالدوران R

إذن : $z_{C'}=-iz_C+10+8i=-i(11-i)+10+8i=-11i+i^2+10+8i=9-3i$

ومنه : لحق C’ صورة C بالدوران R هو $9-3i$.

التمرين الرابع :

الجزء 1:

$$g(x)=(1-x)e^{x}-1$$

1) أ-نبين أن $g'(x)=-xe^{x}$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على R و لكل x من R لدينا : $g'(x)=-e^{x}+(1-x)e^{x}=-e^{x}+e^{x}-xe^{x}=-xe^{x}$

ب-نبين أن g تزايدية على $]-\infty\,,0]$ وتناقصية على $[0,+\infty[$:

نعلم أن $e^{x}\succ 0$ لكل x من R .

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(-x)$

وبالتالي $g'(x)\geq 0$ لكل x من $]-\infty\,,0]$ و $g'(x)\leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$.

ومنه : g تزايدية على $]-\infty\,,0]$ وتناقصية على $[0,+\infty[$.

ولدينا : $g(0)=(1-0)e^{0}-1=0$

2) نستنتج أن : $g(x)\leq 0$ لكل x من R

ليكن x من R

إذا كان $x\geq 0$ فإن $g(x)\leq g(0)$ لأن g تناقصية على $[0,+\infty[$.

إذا كان $x\leq 0$ فإن $g(x)\leq g(0)$ لأن g تزايدية على $]-\infty\,,0]$.

ومنه مهما يكن x في R لدينا : $g(x)\leq g(0)$

وبالتالي : $g(x)\leq 0$ لكل x من R (لأن $g(0)=0$)

الجزء 2:

$$f(x)=(2-x)e^{x}-x$$

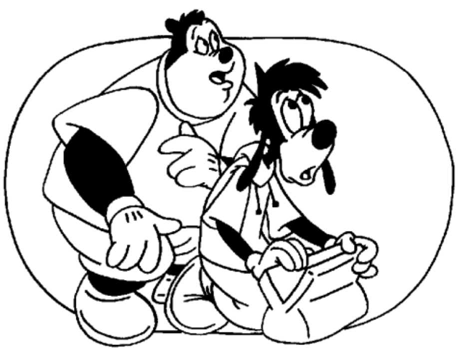
1) أ- نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$:

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2-x)e^{x}-x$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2-x}{x}e^{x}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left[\left(\frac{2}{x}-1\right)e^{x}-1\right]$$

وحيث أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-1\right)e^{x}=-\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-1\right)e^{x}-1=-\infty$ وبالتالي : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.



ب- نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-1\right)e^{x}-1$

$$=-\infty$$

هندسيا المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب جوار $(+\infty)$.

2) أ- نبين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x}-xe^{x}-x$

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^{x}-xe^{x})$ إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=0$

ب- نبين أن المستقيم المعرف بالمعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C) جوار $(-\infty)$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x)]=0$

إذن : المستقيم (D) المعرف بالمعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحنى (C) جوار $(-\infty)$.

3) أ- نبين ان : $f'(x)=g(x)$ لكل x من R :

الدالة f قابلة للإشتقاق على R ولكل x من R لدينا :

$$f'(x)=-e^{x}+(2-x)e^{x}-1=-e^{x}+2e^{x}-xe^{x}-1=e^{x}-xe^{x}-1=g(x)$$

ب- تأويل هندسي للنتيجة $f'(0)=0$:

النتيجة $f'(0)=0$ تعني هندسيا أن المنحنى (C) يقبل في النقطة ذات الأفصول 0 مماسا أفقيا .

ج- لدينا $f'(x)=g(x)$ لكل x من R .

بما أن $g(x)\leq 0$ لكل x من R و $f'(x)=g(x)$ لكل x من R فإن $f'(x)\leq 0$ لكل x من R .

ومنه f تناقصية على R .

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
f	$+\infty$ ↘		$-\infty$

4) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في R وأن $\frac{3}{2}\prec\alpha\prec 2$:

الدالة f متصلة وتناقصية قطعا على R

إذن $f(R)=\left]\lim\limits_{-\infty} f\,,\lim\limits_{+\infty} f\right[=\left]-\infty,+\infty\right[$

وبما أن العدد 0 عنصر من $\left]-\infty,+\infty\right[$ فإنه يقبل سابقا وحيدا α بالدالة f في R .

وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في R .

وحيث أن $f\left(\frac{3}{2}\right)\times f(2)\prec 0$ (لأن $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{e^{\frac{3}{2}}-3}{2}\succ 0$ و $f(2)\prec 0$)

فإن $\frac{3}{2}\prec\alpha\prec 2$ وذلك حسب مبرهنة القيم الوسيطية .

5) أ- نحل في R المعادلة $f(x)+x=0$:

ليكن x عددا حقيقيا و S مجموعة حلول المعادلة.

$$x\in S\Leftrightarrow f(x)+x=0$$
$$\Leftrightarrow(2-x)e^{x}=0$$
$$\Leftrightarrow 2-x=0$$

لأن $e^x \succ 0$ لكل x من R.

ومنه $x = 2 \Leftrightarrow S = 0 \; x \in S$ وبالتالي $S = \{2\}$

استنتاج: لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. لدينا :

http://www.vrac-coloriages.net

$$M \in (C) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (C) \\ M \in (D) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -x \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

ومنه تقاطع (C) و (D) هو النقطة التي زوج إحداثياتها $(2,-2)$.

ب- لندرس إشارة $f(x)+x$ على R :

لدينا $f(x)+x = (2-x)e^x$

إشارة $(2-x)e^x$ هي إشارة $(2-x)$.

وبالتالي

إذا كان $x \leq 2$ فإن $0 \leq 2-x$ ومنه $0 \leq f(x)+x$.
إذا كان $2 \leq x$ فإن $2-x \leq 0$ ومنه $f(x)+x \leq 0$.

استنتاج :

لدينا: $f(x)+x \succ 0$ لكل x من $]-\infty , 2[$ ومنه $f(x)-(-x) \succ 0$ لكل x من $]-\infty , 2[$

وعليه فإن : (C) يوجد فوق (D) على $]-\infty , 2[$

لدينا: $f(x)+x \prec 0$ لكل x من $]2,+\infty[$ ومنه $f(x)-(-x) \prec 0$ لكل x من $]2,+\infty[$.

وعليه فإن : (C) يوجد تحت (D) على $]2,+\infty[$.

6) أ- نبين أن (C) يقبل نقطة انعطاف زوج إحداثيتها $(0,2)$:

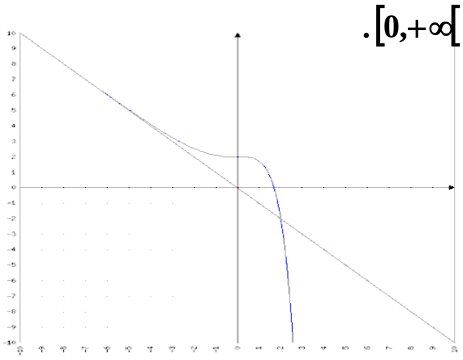
الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على R ولكل x من R لدينا $f''(x) = g'(x)$

ومن خلال الجزء الأول للتمرين نستنتج أن :

$f''(x) \geq 0$ لكل x من $]-\infty , 0]$ و $f''(x) \leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$.

ومنه f'' تنعدم في 0 وتغير إشارتها بجواره

وبالتالي المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف زوج إحداثيتها $(0,2)$.



ب-إنشاء (D) و (C) :

7) أ- حساب التكامل $\int_{-1}^{0} (2-x)e^x dx$:

نضع : $\begin{cases} u(x) = 2-x \\ v(x) = e^x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x) = -1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

وبالتالي :

$$\int_{-1}^{0}(2-x)\,e^{x}dx=\left[(2-x)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^{x}dx$$

$$=\left[(2-0)e^{0}-(2-(-1))e^{-1}\right]+\int_{-1}^{0}e^{x}dx$$

$$=2-3e^{-1}+\left[e^{x}\right]_{-1}^{0}$$

$$=2-3e^{-1}+e^{0}-e^{-1}$$

$$=2-3e^{-1}+1-e^{-1}$$

$$=3-4e^{-1}$$

$$=3-\frac{4}{e}$$

ب- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$ هي

$$\int_{-1}^{0}\left[f(x)-(-x)\right]dx=\int_{-1}^{0}(2-x)e^{x}dx\ ua$$

$$=\left(3-\frac{4}{e}\right)cm^{2}$$

مع متمنياتي لكم بالتوفيق

wadiiifi@hotmail.com

http://www.vrac-coloriages.net