فرض تجريبي رقم 02 – 2 بكالوريا علوم رياضية

Durée:03heures

■ التمرين رقم 01:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $I=]-\infty;0[$ بما يلي :

$$(\forall x\in I);f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}\ .$$

1)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال I .

2)- أثبت أن : $(\forall x\in]-\infty;0[);f(x)<x$.

3)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0\in]-\infty;0[\text{ و } (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=f^{-1}(u_n)\ .$$

أ- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة قطعا .

ب- إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

■ التمرين رقم 02:

⇦ ليكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$ و $(u_n)_{n\geq 2}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});u_n=\sqrt[n]{x}\ .$$

1)- نفترض أن : $x\in[1;+\infty[$.

✓ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\});0\leq u_n-1\leq\dfrac{x-1}{n}$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

2)- نفترض أن : $x\in]0;1[$.

✓ باستعمال نتيجة السؤال**1**)- أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$.

⇦ لتكن f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+);f_n(x)=x+\sqrt[n]{x}-1 \text{ ، حيث } n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ .$$

3)- بين أن المعادلة : $(E_n):f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}^+$ بحيث : $0<\alpha_n<1$.

4)- قارن الدالتين f_n و f_{n+1} على المجال $]0;1[$ ، ثم إستنتج رتابة المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$.

5)- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متقاربة و اعط تأطيرا لنهايتها .

6)- أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.

■ التمرين رقم 03:

⇦ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، نضع : $u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ و $v_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

و لتكن F_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $(\forall x \in \mathbb{R}^+);F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$.

1)- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متحاديتان ، ماذا تستنتج ؟

2)- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+);F_n'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$.

3)- إستنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+);F_{2n+1}(x) \le \operatorname{Arctan} x \le F_{2n}(x)$.

4)- إستعمل نتيجة السؤال**3**)- لتحديد النهاية المشتركة لكل من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

■ التمرين رقم 04:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على المجال $I = \left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$ بما يلي :

$$(\forall x \in I);f(x) = \frac{1}{1-\sin(2x)} .$$

1)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $J = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

2)- أ- أدرس قابلية إشتقاق الدالة f^{-1} على اليمين في $x_0 = \frac{1}{2}$ و أول النتيجة المحصل عليها .

ب- بين أن الدالة f^{-1} قابلة للإشتقاق على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ و أن :

$$\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right);\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{2x-1}} .$$

3)- بين أن المعادلة : $(E):f^{-1}(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال J بحيث $1 < \alpha < 2$.

4)- أ- بين أن : $f^{-1}([1;2]) \subset [1;2]$.

ب- بين أن : $\left(\forall (x,y) \in ([1;2])^2\right);\left|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\right| \le \frac{1}{2}|x-y|$.

5)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N});u_{n+1} = f^{-1}(u_n) .$$

أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N});u_n \in [1;2]$.

ب- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N});|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

ج- إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

⇦ **سؤال إضافي**: بين أن $\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right);f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-1}}\right)\right)$.

■ التمرين رقم 05:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=x+\sqrt{x^2+1}\ .$$

1)- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)\le f(x+1)-f(x)\le f'(x+1)\ .$$

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N});u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f'(k)\ .$$

2)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\dfrac{f(n)}{n+1}\le u_n\le\dfrac{f(n+1)-1}{n+1}$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

■ التمرين رقم 06:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $I=[1;2]$ بما يلي :

$$(\forall x\in I);f(x)=\tan\left[\frac{\pi}{4}(x-1)\right]\ .$$

1)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $J=[0;1]$.

2)- بين أن f^{-1} قابلة للإشتقاق على J و أن : $(\forall x\in J);\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{4}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

3)- بين أنه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\left(\exists!u_n\in[1;2]\right);f(u_n)=\dfrac{1}{n}$.

4)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

5)- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $S_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(1-\dfrac{1}{n\times k}\right)$.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$، بين أن :

$$(\forall k\in\{1;2;...;n\});f^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\le f^{-1}\left(1-\frac{1}{n\times k}\right)\le f^{-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\ .$$

✓ إستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها .

⇦ **سؤال إضافي**: تحقق من نتيجة السؤال**2)**- ، بعد تحديد تعبير $f^{-1}(x)$ بدلالة x لكل $x\in J$.

Bon courage et Bonne chance !!!