منـــارة الـفـــردوس	فرض محروس رقم 02	2 باك علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الثانية : 2011/2010	ن : عبدالله بن لختير
		مدة الإنجاز : 04 ساعات

■ التمرين رقم 01: $(1,5pts)$

لتكن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ بحيث : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+\int_0^x f(t)\,dt$.

1)- بين أن f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أنها حل للمعادلة التفاضلية : $(\mathrm{E}): y'=y+1$.

2)- حل المعادلة (E) ، ثم إستنتج تعبير الدالة f على $\mathbb{R}$.

■ التمرين رقم 02: $(2,5pts)$

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(\mathrm{F}): y''+\frac{1}{x^4}y=0$.

1)- لتكن f و φ دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث : $f(x)=x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

✓ بين أن f تكون حلا للمعادلة (F) إذا و فقط إذا كانت φ حلا للمعادلة : $(G): y''+y=0$.

2)- حل المعادلة (G) ، ثم إستنتج مجموعة حلول المعادلة (F) .

3)- أحسب التكامل التالي : $I=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

■ التمرين رقم 03: $(03pts)$

لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,dx$ و $v_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$.

1)- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);0\le u_n\le\frac{\ln 2}{n+1}$ ، ثم إستنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2)- أحسب التكامل : $I=\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx$ ، ثم إستنتج قيمة $u_1=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$.

3)- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ و لكل $x\in[0;1]$ نضع : $S_n=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n$.

✓ بين أن : $S_n=\frac{1}{1+x}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$ و $v_n=\ln 2+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

✓ إستنتج أن : $|v_n-\ln 2|\le\frac{1}{n+2}$ ، ثم أحسب نهاية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4)- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $u_n=\frac{\ln 2}{n+1}+\frac{(-1)^n}{n+1}(\ln 2-v_n)$.

✓ إستنتج أن المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $w_n=(n+1)u_n$ متقاربة نحو عدد حقيقي ينبغي تحديده .

■ **التمرين رقم 04:** $(5,5pts)$

←الجزء الأول: $(1,5pts)$

1)- بين أن المعادلة : $(\mathrm{E}): x^3+2x-1=0$ تقبل حلا و حيدا x_0 في $\mathbb{R}$ بحيث : $0<x_0<1$.

2)- بين أن : $(\forall x\in]-1;+\infty[);\ln(1+x)\le x$.

3)- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(0)=0$ و $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x};x\neq 0$.

✓ بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

←الجزء الثاني: $(04pts)$

لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\mathrm{F}(x)=\int_x^{x^2} f(t)\,dt$.

1)- بين أن F دالة زوجية .

2)- ضع جدولا تحدد فيه إشارة F على $\mathbb{R}^+$.

3)- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن :

$$\mathrm{F}'(0)=0 \text{ و } (\forall x\in\mathbb{R}^*);\mathrm{F}'(x)=\frac{2\ln(1+x^4)-\ln(1+x^2)}{x}.$$

✓ بين أن المعادلة : $\mathrm{F}'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث : $0<\alpha<1$.

✓ حدد منحى تغيرات F على كل مجال من المجالين $[0;\alpha]$ و $[\alpha;+\infty[$.

4)- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{x}\right)=3(\ln x)^2$ ، ثم إستنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)$.

5)- ليكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$.

✓أحسب التكامل : $\int_x^{x^2}\dfrac{\ln(t^2)}{t}dt$ ثم إستنتج أن : $\mathrm{F}(x)-3(\ln x)^2=\int_x^{x^2}\dfrac{\ln(1+t^{-2})}{t}dt$.

✓بين أن : $(\forall x\in]1;+\infty[);3(\ln x)^2\le \mathrm{F}(x)\le 3(\ln x)^2+\dfrac{1}{2x^2}$.

✓أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{F}(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_{F}) بجوار $+\infty$ ؟

6)- أرسم المنحنى (C_{F}) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(نعطي : $\alpha\simeq 0,7$ و $\mathrm{F}(\alpha)\simeq -0,1$ و $\mathrm{F}(2)\simeq 1,5$) .

■ **التمرين رقم 05**: $(08pts)$

←الجزء الأول: $(03pts)$

1)- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(x-1)e^{2-x}$.

و ليكن (C_f) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث الوحدة هي $1cm$.

✓أدرس الفرعين للانهائيين للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

✓ضع جدول تغيرات f ، ثم أرسم المنحنى (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

✓ليكن $\lambda \in]1;+\infty[$ ، أحسب بدلالة λ المساحة $\mathrm{A}(\lambda)$ للحيز المستوى المحصور بين (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y=0$ و $x=1$ و $x=\lambda$ و إستنتج النهاية : $\lim_{\lambda\to+\infty}\mathrm{A}(\lambda)$.

2)- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $I=[1;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=(x-1)^n e^{2-x}$.

و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

✓ أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$.

✓ ضع جدول تغيرات الدالة f_n على المجال I .

✓ إستنتج أنه لكل $x\in I$ ، لدينا : $0\le f_n(x)\le n^n e^{1-n}$.

✓ أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) ، ثم أرسم (C_2) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

←الجزء الثاني: $(02pts)$

لتكن φ_n الدالة المعرفة على $J=]-1;+\infty[$ بما يلي : $\varphi_n(x)=\dfrac{1}{f_n(x+2)}$.

1)- بين أن : $(\forall x\in J);\varphi'_n(x)=\varphi_n(x)-n\varphi_{n+1}(x)$.

2)- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $I_n=\int_0^1\varphi_n(t)\,dt$.

✓ بين أن المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية و إستنتج أنها متقاربة .

✓ بين أن لكل $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$: $\dfrac{1}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\le I_n\le\dfrac{e}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$ و إستنتج $\lim_{n\to+\infty}I_n$.

3)- بين أن لكل $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n=nI_{n+1}-1+\dfrac{e}{2^n}$.

✓ أحسب النهاية : $\lim_{n\to+\infty}nI_{n+1}$ ، ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty}nI_n$.

← **الجزء الثالث**: $(03pts)$

لتكن F الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بما يلي : $\mathrm{F}(x)=\int_x^{x+1}\frac{f(t)}{(t-1)^2}dt$.

1)- بين أن F قابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ و أن : $\mathrm{F}'(x)=\frac{e^{1-x}}{x(1-x)}\times\left[(e-1)x+1\right]$.

✓ إستنتج منحنى تغيرات الدالة F على $]1;+\infty[$.

2)- بين أن : $(\forall t\in]1;+\infty[);0\leq\frac{f(t)}{(t-1)^2}\leq\frac{1}{(t-1)^2}$.

✓ إستنتج أن : $(\forall x\in]1;+\infty[);0\leq \mathrm{F}(x)\leq\frac{1}{x(1-x)}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)$.

3)- ليكن $x\in]1;+\infty[$ ، بين أن : $(\forall t\in[x;x+1]);\frac{f(t)}{(t-1)^2}\geq\frac{e^{1-x}}{t-1}$.

✓ إستنتج أن : $(\forall x\in]1;+\infty[);\mathrm{F}(x)\geq e^{1-x}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to1^+}\mathrm{F}(x)$.

✓ ضع جدول تغيرات الدالة F ، ثم أعط شكل المنحنى (C_{F}) في معلم متعامد و ممنظم .

إنتهى الموضوع .

تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .

■ **التمرين الإضافي**: $(03pts)$

1)- أحسب التكاملين : $I=\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$ و $J=\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin^2 x}dx$.

2)- أحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n=\frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{2^2}+\ldots+\sqrt[n]{2^n}\right).$$

3)- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

✓ أحسب نهاية المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);v_n=\left(\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)\right)-n$.