المعامل : 9	إ متحان تجريبي للسنة الثانية باكالوريا رقم 8	المادة : الرياضيات
مدة الإنجاز : 4 ساعات	الشعبة : العلوم الرياضية (أ - ب) ثانوية المختار السوسي نيابة الخميسات	الأستاذ : علي الشريف

آضبط ساعتك و أنجز هذا الإمتحان في ورقة نظيفة محترما الوقت المحدد مع آحترام ضوابط و طقوس الإمتحان

التمرين الأول : 3ن

1) أ - حل في C المعادلة $X^2 - X + 1 = 0$ ثم أكتب الجذرين على شكلهما المثلثي.

ب - آستنتج حل النظمة في C^2 : $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x.y = 1 \end{cases}$ بحيث. $\operatorname{Im} y^3 \leq 0$

2) لتكن في C المعادلة $(E)\, z^3 - 3z - 1 = 0$ و ليكن x و y عددي عقديين بحيث xy=1.

أ - بين أن x+y جدر للمعادلة(E) إذا وفقط إذاكان: $x^3 + y^3 = 1$.

ب- أستنتج مما سبق أن حلول المعادلة(E) هي : $S = \left\{2\cos\frac{\pi}{9}; 2\cos\frac{7\pi}{9}; 2\cos\frac{13\pi}{9}\right\}$.

التمرين الثاني : 3ن

1) نعتبرفي Z^2 المعادلة : $(E): 195x - 232y = 1$

أ - حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 232 .

ب - بين أ ن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(163 + 232k; 137 + 195k) / k \in Z\}$

ت – أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الدي يحقق : $0 \leq d \leq 232$ و $195d \equiv 1[232]$

2) بين أ ن 233 عدد أولي .

3) لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 .

نعتبر التنطبيق f المعرف من A نحو A بما يلي : مهما يكنa من Aفإن $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233.

أ - بين أ ن : $(\forall a \in A - \{0\}) : a^{232} \equiv 1[233]$

ب - بين أ نه لكل عنصرين a و b من المجموعة A إداكان $f(a) = f(b)$ فإن $a = b$.

ت - ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a) = b$ حددa بدلالة b

ت – آستنتج أن التطبيقf تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

التمرين الثالث : 3ن

I - نعتبر المجموعة $v = \{f \in F(IR, IR) / \forall x \in IR;\, f(x) = a + bx + ce^x; (a,b,c) \in IR^3\}$

1) بين أن : $(V,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و أن الأسرة $\beta = (f_0, f_1, f_2)$ حيث $f_0 : x \to 1$ و $f_1 : x \to x$ و $f_2 : x \to e^x$ أساس ل V .

2) أ – ليكن $f \in V$ حيث $f(a,b,c)_\beta$, بين أن الدالة F المعرفة ب : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt \quad (\forall x \in IR)$ تنتمي إلى V وحدد إحداثيتها في الأساس β بدلالة a و b و c .

ب – نعتبر التطبيق : $\begin{matrix} \phi : V \to V \\ f \to \phi(f) = F \end{matrix}$ حيث F هي الدالة المعرفة في السؤال 2 – أ .

نضع : $\phi^1 = \phi$ و $(\forall n \in IN^*) : \phi^{n+1} = \phi^n o \phi$ ونضع $f(a,b,c)_\beta$ و $\phi^n(f)(a_n, b_n, c_n)$

أ حسب a_n و b_n و c_n بدلالة a و b و c و n .

II - لتكن f و F الدالتين المعرفتين ب : $F(x)=(e-1)e^{x}-x-\frac{3}{2}$ و $f(x)=e^{x}-x-1$ $(\forall x\in IR)$

1) تأكد أن $\phi(f)=F$.

2) أدرس تغيرات f و F و أنشئ (C_f) و (C_F) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

3) أحسب مساحة الحيز من المستوى المحصور بين (C_f) و (C_F) ومحور الأراتيب و المستقيم : $x=\ell n(2)$

4) أ – بين أ ن : $(\forall n\in IN)\left(\exists!\alpha_n\in[n,n+1]\right):\int_{n}^{n+1}f(t).dt=f(\alpha_n)$.

ب - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة ب : $u_n=\alpha_n-n$, بين أ ن المتتالية (u_n) محدودة .

ت – بين أ ن : $(\forall n\in IN): e-1-\frac{1}{2e^{n}}=e^{u_n}-\frac{u_n}{e^{n}}$

ث - أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5) أ - ليكن x من IR أ حسب : $F(x)-f(x+\ell)$.

ب – آ ستنتج أ ن (C_F) هو صورة (C_f) بتحويل في المستوى ينبغي تحديده .

3ن

التمرين الرابع :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 20 . يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10- n كرة سوداء .
نفترض أن جميع الكرات غيرقابلة للتمييز باللمس . نسحب كرة من الكيس و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس . نكرر هده التجربة n مرة . نسمي p_k آحتمال الحصول على k كرة بيضاء $(0\leq k\leq n)$.

1) أحسب p_k بدلالة n و k .

2) نضع : $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}$ حيث $k\in\{0,1,2,....,n-1\}$.

أ - بين أ ن : $u_k=\frac{n-k}{k+1}\times\frac{10}{n-10}$.

ب - بين أ ن : $0\leq k\leq 9\Leftrightarrow u_k\succ 1$ و $10\leq k\leq n-1\Leftrightarrow u_k\leq 1$.

ت - آ ستنتج أ كبر قيمة M للعدد p_k عندما يتغير k في $\{0,1,2,....,n\}$.

ث – بين أ ن : $M=\frac{n!}{n^{n}}\times\frac{10^{10}}{10!}\times\frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$.

8ن

مسألة :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي : $f(x)=(1+x).e^{-2x}$.و ليكن (C) منحناها في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

I - 1) أ – أ حسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب - أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .

2) أدرس تغيرات الدالة f على IR .

3) أ - أ درس تقعر المنحنى (C) .

ب – أ نشئ المنحنى (C) .

4) أ – بين أ ن f حل للمعادلة التفاضلية : $(E): y''+3y'+2y=-e^{-2x}$

ب - حدد الحل العام للمعادلة (E) .

II – ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم , نرمز ب A_n لمساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم دي المعادلة $x=n$.

1) أحسب A_n بدلالة n .

2) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

III - لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = n\int_0^1 \left[f(x)\right]^n dx$.

1) بين أ ن : $(\forall n \in IN^*) : u_n = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n .e^{-2t} dt$ يمكن وضع $t = nx$.

2) أ - بين أ ن : $(\forall u \in [1,2]) :\ 2-u \le \frac{1}{u} \le 1$.

ب - آستنتج أن : $(\forall n \in IN^*)\,(\forall x \in [0,n]) : x - \frac{x^2}{2n} \le n.\ell n\left(1+\frac{x}{n}\right) \le x$

3) أ – بين أ ن : $(\forall n \in IN^*) : u_n \le \int_0^n e^{-x} dx$.

ب - بين أ ن : $(\forall n \in IN^*) : e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}} \int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x} dx \le u_n$

ت – آستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة و حدد نهايتها .

4) ليكن a عنصرا من المجال $]0,1[$.

أ - بين أ ن : $\int_a^1 n\left[f(x)\right]^n dx \le n(1-a)\left[f(a)\right]^n$

ب- آستنتج أ ن : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^1 n\left[f(x)\right]^n dx = 0$

ت - أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^a n\left[f(x)\right]^n dx$.

Microsoft Éditeur
d'équations 3.0