تمرين رقم 01:

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=2$ و $(\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}=\frac{1}{2}(1+u_n)^2$.

1- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية .

2- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}-u_n\geq\frac{5}{2}$.

3- استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),u_n\geq\frac{5n}{2}+2$ ، ثم حدد نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

تمرين رقم 02:

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=3$ و $(\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}$.

1- أ- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),2<u_n<4$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),4-u_{n+1}\leq\frac{4}{5}(4-u_n)$.

د- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),0<4-u_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2- لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $v_n=\frac{u_n-4}{u_n-2}$.

أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية محددا أساسها و حدها الأول .

ب- عبر عن u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج مرة أخرى نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3- لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

✓ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),S_n\geq 4n-1+4.\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

تمرين رقم 03:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}),f(x)=x+3-\sqrt{x^2+5}$.

1- بين أن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$ ، ثم أول هندسيا هذه النتيجة .

2- تحقق أن : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ، ثم بين أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا (Δ) معادلته : $y=2x+3$.

3- حدد أفصول نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الأفاصيل .

4- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}),f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+5}-x}{\sqrt{x^2+5}}$ ، ثم استنتج أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

ب- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول $x_0=\frac{-2}{3}$.

5- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}),f(x)-x=\frac{4-x^2}{3+\sqrt{x^2+5}}$.

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):f(x)=x$ ، ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته : $y=x$.

6- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

7- أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال $]-\infty,3[$.

ب- بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق في الصفر ، ثم احسب $(f^{-1})'(0)$.

ج- ارسم المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (استعمل لونا مغايرا للون (C_f)) .

8- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=1$ و $(\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),1\leq u_n<2$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

9- لتكن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),S_n=3n-\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{u_k^2+5}$.

✓ عبر عن S_n بدلالة u_n ، ثم استنتج نهاية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

تمرين رقم 04:

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_1 = 1$ و $(\forall n\in\mathbb{N}^*), u_{n+1} = u_n.\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

1- بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n > 0$.

2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $v_n = u_n.\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسية محددا أساسها و حدها الأول v_1 .

ب- استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*), u_n = \frac{1}{2^{n-1}.\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$ ، ثم احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

تمرين رقم 05:

⇦ لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$f(x) = -2 + \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$.

1- حدد D_f ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ، ثم استنتج طبيعة الفرع اللانهائي ل (C_f) بجوار $+\infty$.

3- بين أن : $(\forall x\in]-1,+\infty[), f'(x) = \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f .

4- أ- بين أن : $(\forall x\in]-1,+\infty[), f''(x)=\frac{2-x}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}}$.

ب- ادرس تقعر المنحنى (C_f) و حدد أفصول نقطة انعطافه .

5- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6- لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,+\infty[$.

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده .

ب- ارسم المنحنى $(C_{g^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (استعمل لونا مغايرا للون (C_f)) .

ج- احسب $g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ، ثم بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في $\frac{1}{2}$ و احسب $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

7- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=3$ و $(\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}=g(u_n)$.

أ- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), 0<u_n\le 3$.

ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

ج- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

تمرين رقم 06:

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=1$ و $(\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}=\frac{2n+1}{4n+6}.u_n$.

1- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), 0<u_n\le 1$.

2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3- احسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معللا جوابك .

4- لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع : $v_n=(2n+1).u_n$.

أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها و حدها الأول v_0 .

ب- عبر عن u_n بدلالة n لكل $n\in\mathbb{N}$ ، ثم احسب مرة أخرى نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5- لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع : $S_n = u_0+3u_1+5u_2+\ldots+(2n+1).u_n$.

✓ عبر عن S_n بدلالة n لكل $n\in\mathbb{N}$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Fin du sujet