

تصحيح الإمتحان الوطني لمادة الرياضيات

السنة الثانية علوم رياضية

يونيو 2011

ذ. سعيد الصديق — تارودانت

Said.seddik@hotmail.fr

التمرين الأول

الجزء الأول :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad A^{2k} = I$$

① لنبين أن :

لدينا :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

إذن :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad (A^2)^k = I^k = I$$

و بالتالي :

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad A^{2k} = I$$

②

$$A \times A = I$$

لدينا

إذن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} بحيث :

$$A^{-1} = A$$

الجزء الثاني :

① أ- * قانون تركيب داخلي في I :ليكن x و y من $]a; +\infty[$:

$$y - a > 0 \quad \text{و} \quad x - a > 0$$

إذن

$$\Rightarrow (x - a)(y - a) > 0$$

$$\Rightarrow (x - a)(y - a) + a > a$$

$$\Rightarrow x * y \in]a; +\infty[= I$$

ب- * تبادلي في I

$$I =]a; +\infty[: \text{ليكن } x \text{ و } y \text{ من}$$

لدينا :

$$x * y = (x - a)(y - a) + a$$

$$= (y - a)(x - a) + a$$

$$= y * x$$

* تجميعي في I

$$I =]a; +\infty[: \text{ليكن } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ من}$$

لدينا :

$$(x * y) * z = [(x - a)(y - a) + a] * z$$

$$= (x - a)(y - a)(z - a) + a$$

ومن جهة أخرى :

$$x * (y * z) = x * [(y - a)(z - a) + a]$$

$$= (x - a)(y - a)(z - a) + a$$

إذن :

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

ج. * تبادلي إذن : e هو العنصر المحايد بالنسبة ل (*; a) يكفي :

$$(\forall x \in I) x * e = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) (x - a)(e - a) + a = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) (x - a)(e - a) - (x - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) (x - a)(e - a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e = a + 1$$

$a + 1$ هو العنصر المحايد في $(I; *)$

② زمرة تبادلية $(I; *)$:

ليكن x من I و x' مماثله بالنسبة للقانون *

$$x * x' = a + 1 \Leftrightarrow (x - a)(x' - a) + a = a + 1$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(x' - a) = 1$$

$$\Leftrightarrow x' - a = \frac{1}{x - a}$$

$$\Leftrightarrow x' = a + \frac{1}{x - a} \in I$$

إذن كل عنصر x من I يقبل ممثلا $a + \frac{1}{x - a}$ في $(I; *)$ أي:

— قانون تركيب داخلي تجميعي و تبادلي في $(I; *)$.
 * يقبل عنصرا محايدا : $a + 1$.
 كل عنصر x من I يقبل ممثلا بالنسبة ل*.

و بالتالي

$(I; *)$ زمرة تبادلية

③ أ- تشاكل φ من $(I; *)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*; \times)$

ليكن x و y من I :

لدينا

$$\begin{aligned}\varphi(x * y) &= \varphi[(x - a)(y - a) + a] \\ &= \frac{1}{(x-a)(y-a)} \\ &= \frac{1}{x-a} \times \frac{1}{y-a} \\ &= \varphi(x) \times \varphi(y)\end{aligned}$$

φ تقابل من I نحو \mathbb{R}_+^* :

ليكن y من \mathbb{R}_+^* ، لنحل في I المعادلة :

$$\begin{aligned}\varphi(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{x-a} = y \\ &\Leftrightarrow x - a = \frac{1}{y} \\ &\Leftrightarrow x = a + \frac{1}{y} \in I\end{aligned}$$

المعادلة لها حل وحيد إذن φ تقابل من I نحو \mathbb{R}_+^* .

و بالتالي :

φ تشاكل تقابلي من $(I; *)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*; \times)$

ب- لنحل في المجموعة I المعادلة $x * x * x = a^3 + a$

$$\Leftrightarrow \varphi(x * x * x) = \varphi(a^3 + a)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) \times \varphi(x) \times \varphi(x) = \frac{1}{a^3}$$

$$\Leftrightarrow (\varphi(x))^3 = \frac{1}{a^3}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-a} = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow x - a = a$$

$$\Leftrightarrow x = 2a$$

و بالتالي :

$$S_I = \{2a\}$$

التمرين الثاني :

① N يقبل القسمة على 11 :

$$\begin{aligned} N &= \underbrace{111 \dots 11}_{2010 \text{ مرة من } 1} = 11 \times 10^{2008} + 11 \times 10^{2006} + \dots + 11 \times 10^2 + 11 \\ &= 11(10^{2008} + 10^{2006} + \dots + 10^2 + 1) \\ &= 11k \quad / k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

② أ- 2011 أولي :

- لدينا : $\sqrt{2011} = 44.8 \dots$ و 2011 لا يقبل القسمة على :

43;41 ;37 ;31 ;29 ;23 ;19 ;17 ;13 ;11 ;7 ;5 ;3 ;2

- لدينا :

$$\begin{aligned} 10^{2010} - 1 &= (10 - 1)(10^{2009} + 10^{2008} + \dots + 10 + 1) \\ &= 9N \end{aligned}$$

ب- 2011 يقسم 9N :

2011 أولي حسب مبرهنة - فيرما - فإن : $10^{2011} \equiv 10[2011]$

وبما أن $2011 \wedge 10 = 1$ فإن : $10^{2010} \equiv 1[2011]$

أي 2011 يقسم 1 - 10²⁰¹⁰

2011 يقسم 9N

إذن

ج- 2011 يقسم N :

لدينا : 2011 يقسم 9N ، وأولي مع 9 حسب مبرهنة - كوص - فإن :

2011 يقسم N

③ N يقبل القسمة على 22121 :

العددان 2011 و 11 أوليان فيما بينهما و يقسمان N

إذن 11 × 2011 يقسم N أي :

22121 يقسم N

التمرين الثالث :

الجزء الأول :

$$p(z) = z^2 + [(1 - i)m - 4]z - im^2 - 2(1 - i)m + 4 \quad \text{نضع } \textcircled{1}$$

لدينا :

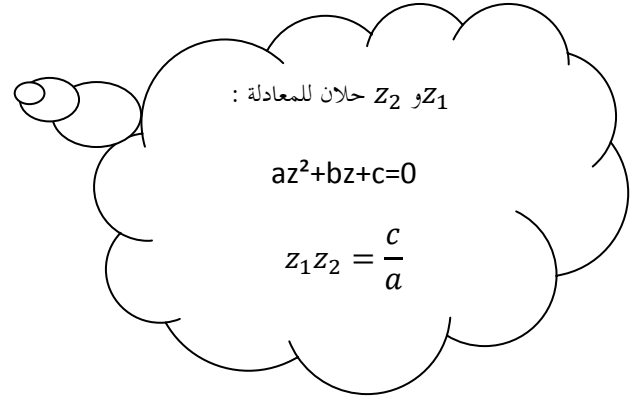
$$\begin{aligned} p(z_1) &= (2 - m)^2 + [(1 - i)m - 4](2 - m) - im^2 - 2(1 - i)m + 4 \\ &= \cancel{4} - \cancel{4}m + m^2 + 2(1 - i)m - \cancel{8} - (1 - i)m^2 + \cancel{4}m - im^2 - 2(1 - i)m + \cancel{4} \\ &= m^2 - m^2 + im^2 - im^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

و بالتالي z_1 حل للمعادلة (E_m)

-أ ②

$$z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow -im^2 - 2(1-i)m + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

ب- لنحدد قيم m بحيث $z_1 z_2 = 1$

لنحل المعادلة :

$$im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

لدينا

$$\Delta' = (1-i)^2 + 3i = i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

إذن :

$$m = \frac{i-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{i} = 1+i - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

أو

$$m = \frac{i-1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}{i} = 1+i + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

و بالتالي :



الجزء الثاني :

$$S: M(z) \rightarrow M(z') / z' - 1 = -(z - 1)$$

① أ- لدينا:

$$z' - 1 = -(z - 1) = e^{i\pi}(z - 1)$$

إذن

أي S هو الدوران الذي مركزه 1 وزاويته π ،

S هو التماثل المركزي S_I :

وبالتالي :

ب-

$$M'' = R(M) \Rightarrow z'' - 1 - i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1)$$

$$\Rightarrow z'' = i(z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Rightarrow z'' = iz - i + 1 + 1 + i$$

$$\Rightarrow z'' = iz + 2$$

②

$$\frac{z'' - 2}{z - 2} = \frac{iz}{-z} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

أ- لدينا :

إذن المثلث $AM'M''$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A

ب- لنحدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة:

النقط A و Ω و M' و M'' غير مستقيمة لأن $AM'M''$ مثلث :

إذن : النقط A و Ω و M' و M'' متداورة يكافئ:

$$(\overrightarrow{\Omega M'}; \overrightarrow{\Omega M''}) \equiv (\overrightarrow{AM'}; \overrightarrow{AM''}) [\pi]$$

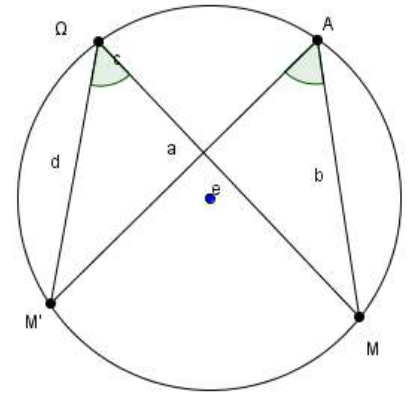
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z'' - 1 - i}{z' - 1 - i}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'' - 2}{z' - 2}\right) [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{iz + 1 - i}{-z + 1 - i}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [\pi]$$

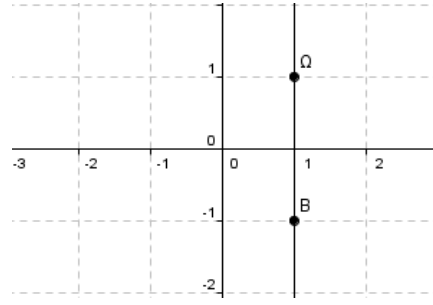
$$\Leftrightarrow \frac{iz + 1 - i}{-z + 1 - i} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z - i - 1}{z - 1 + i} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z - (1 + i)}{z - (1 - i)} \in \mathbb{R}$$



$$\Leftrightarrow M \in (\Omega B) / B(1 - i)$$



و بالتالي

مجموعة النقط M هي المستقيم الذي معادته : $x=1$

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

① ليكن x من $[0, 1[\cup]1, +\infty[$:

$$n = f(x) \Leftrightarrow n = \frac{x}{\ln x}$$

$$\Leftrightarrow n \ln x = x$$

$$\Leftrightarrow \ln x^n = x$$

$$\Leftrightarrow x^n = e^x$$

② f قابلة لإشتقاق على 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$$

إذن : f قابلة لإشتقاق على 0 و $f_d'(0) = 0$.

③

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$$

(C) يقبل المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقاربا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

(C) يقبل محور الأفاصيل إتجاها مقاربا بجوار $+\infty$.

④ تغيرات الدالة على كل من المجالين : $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \quad \text{لدينا :}$$

إشارة f' هي إشارة $\ln x - 1$:

$$\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$$

| x | 0 | 1 | e | $+\infty$ |
|---------|---|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | - | - | 0 | + |
| f | 0 | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

⑤ (C) يقبل نقطة إنعطاف :

لدينا :

$$f''(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x(\ln x)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x(2 - \ln x) = 0$$

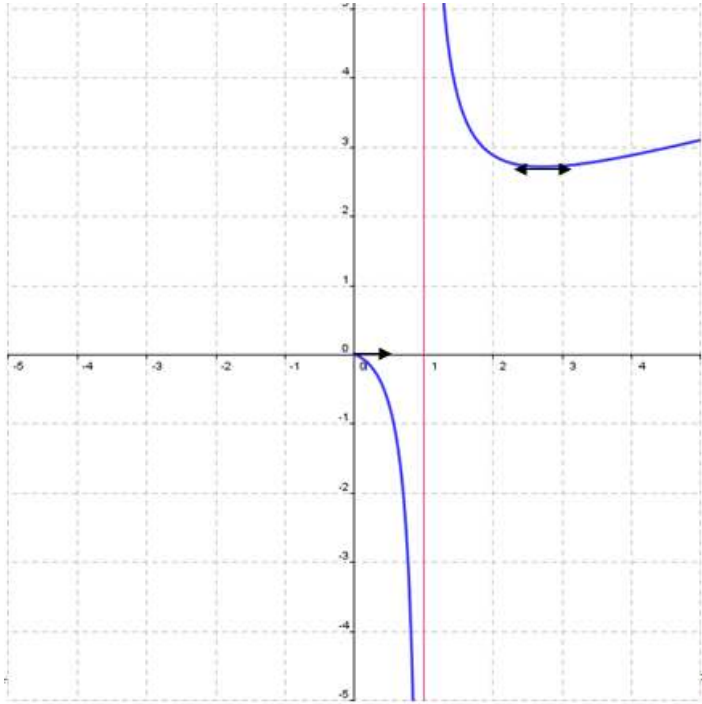
$$\Leftrightarrow 2 - \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = e^2$$

إذن f'' تنعدم وتغير الإشارة في e^2 و بالتالي (C) يقبل نقطة إنعطاف : $(e^2; f(e^2))$

$$I(e^2; \frac{e^2}{2})$$

⑥ منحنى (c) :



⑦

من خلال التمثيل المبياني للدالة f نلاحظ : المستقيم الذي معادلته $y=n$ بحيث $n \geq 3$ يقطع (c) في

نقطتين أفصولاهما a_n و b_n بحيث : $1 < a_n < e < b_n$

الجزء الثاني :

①

$$(\forall n \geq 3) \quad b_n > e$$

* لدينا

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \quad \ln(b_n) > 1$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \quad \frac{1}{\ln(b_n)} < 1$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \quad \frac{b_n}{\ln(b_n)} < b_n$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \quad f(b_n) < b_n$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \quad n < b_n$$

* بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$

② -أ* لدينا $(\forall n \geq 3) f(a_n) = n$ و $f(a_{n+1}) = n + 1$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) f(a_n) < f(a_{n+1})$$

بما أن a_n و a_{n+1} من $]1; e[$ و f تناقصية قطعاً على المجال $]1; e[$.

$$(\forall n \geq 3) a_n > a_{n+1}$$

فإن

و بالتالي

المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية

* المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية ومصغورة بالعدد 1 إذن فهي متقاربة.

$$(\forall n \geq 3) a_n^n = e^{a_n} \quad \text{ب- لدينا}$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \ln(a_n^n) = \ln(e^{a_n})$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) n \ln(a_n) = a_n$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) 1 < n \ln(a_n) < e$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 3) \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$$

لدينا :

$$(\forall n \geq 3) e^{\frac{1}{n}} < a_n < e^{\frac{e}{n}}$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{e}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

وبالتالي :

$$a_n^n = e^{a_n}$$

ج- لدينا

بما أن $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ و الدالة $x \rightarrow e^x$ متصلة في 1 فإن:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_n} = e^1 = e$$

التمرين الخامس :

1 أ- لنبين أن $(\forall x \geq 0) 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$:

لدينا : $(\forall t \in \mathbb{R}) 0 \leq e^{-t^2} \leq 1$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0) 0 \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x dt$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0) 0 \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq x$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0) 0 \leq e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \leq xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0) 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$$

ب- لدينا:

$$(\forall x \geq 1) x^2 \geq x$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 1) -x^2 \leq -x$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 1) e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

$$(\forall x \geq 0) 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$(\forall x \geq 0) 0 \leq F(x) \leq xe^{-x} \quad \text{إذن :}$$

و بما أن $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ فإن :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$$

② الدالة $e^{-t^2} \rightarrow t$ متصلة على المجال $[0; +\infty[$: إذن فهي تقبل دالة أصلية U على المجال $[0; +\infty[$

$$(\forall x \geq 0) F(x) = e^{-x^2} [U(x) - U(0)] \quad \text{إذن :}$$

الدالتان: $x \rightarrow U(x) - U(0)$ و $x \rightarrow e^{-x^2}$ قابلتان للإشتقاق على $[0; +\infty[$

إذن F : قابلة للإشتقاق على $[0; +\infty[$

$$(\forall x \geq 0) F'(x) = (e^{-x^2})' [U(x) - U(0)] + e^{-x^2} [U(x) - U(0)]' \quad \text{و}$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0) F'(x) = -2xe^{-x^2} [U(x) - U(0)] + e^{-x^2} U'(x)$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0) F'(x) = -2xF(x) + e^{-x^2} e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow (\forall x \geq 0) F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

③ أ- G متصلة على يسار $\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} G(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = 0 = F(\frac{\pi}{2}) \quad \text{إذن : لنضع } y = \tan x$$

و بالتالي G متصلة على يسار $\frac{\pi}{2}$.

ب- لدينا :

- الدالة $x \rightarrow \tan x$ متصلة على المجال $[0; \frac{\pi}{2}[$

$$\tan([0; \frac{\pi}{2}[) = [0; +\infty[\quad -$$

- F متصلة على $[0; +\infty[$.

إذن G متصلة على المجال $[0; \frac{\pi}{2}[$ و بما أنها متصلة على يسار $\frac{\pi}{2}$.

$$G \text{ متصلة على المجال } [0; \frac{\pi}{2}[$$

فإن :

$$G \text{ قابلة للإشتقاق على المجال }]0; \frac{\pi}{2}[$$

بنفس الطريقة نبين أن

$$G(0) = G\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{و لدينا :}$$

و بالتالي حسب مبرهنة - رول - يوجد عدد c' من المجال $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث : $G'(c') = 0$

$$\Rightarrow \exists c = \tan c' \in]0; +\infty[/ (c^2+1)F'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \exists c \in]0; +\infty[/ F'(c) = 0$$

و لدينا :

$$F'(c) = e^{-2c^2} - 2cF(c) = 0$$

إذن

$$F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$$

4

أ- الدالة H تناقصية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا :

$$(\forall x \geq 0) F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

إذن

$$(\forall x > 0) \frac{F'(x)}{2x} = \frac{e^{-x^2}}{2x} - e^{x^2}F(x)$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0) \frac{F'(x)}{2x} = \frac{e^{-x^2}}{2x} - e^{x^2}F(x)$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0) H(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\Rightarrow (\forall x > 0) H'(x) = \frac{-4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}{4x^2} - e^{-x^2} < 0$$

و بالتالي

H تناقصية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$

$$H(c) = \frac{F'(c)}{2c} = 0$$

ب- لدينا

بما أن الدالة H تناقصية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$ فإن :

$$\exists! c \in]0; +\infty[/ H(c) = 0$$

$$\Rightarrow \exists! c \in]0; +\infty[/ \frac{F'(c)e^{c^2}}{2c} = 0$$

$$\Rightarrow \exists! c \in]0; +\infty[/ F'(c) = 0$$

جدول تغيرات الدالة F :

إذا كان: $x \leq c$ فإن $H(x) \geq H(c)$ لأن H تناقصية على المجال $]0; +\infty[$

$$(\forall x \geq c) \frac{F'(x)}{2x} e^{x^2} \geq 0 \quad \text{إذن}$$

$$(\forall x \geq c) F'(x) \geq 0 \quad \text{أي}$$

و بالتالي:

F تزايدية على المجال $]0; c]$

بنفس الطريق نبين أن :

F تناقصية على المجال $[c; +\infty[$

| | | | |
|-----|---|------------------------|-----------|
| x | 0 | c | $+\infty$ |
| F | 0 | $\frac{e^{-2c^2}}{2c}$ | 0 |