الثانوية التأهيلية سلمان الفارسي ذ.سمير الرحموني	الفرض المحروس 4 مدة الإنجاز:أربع ساعات	الثانية علوم رياضية 2014/2015

يراعى في التصحيح دقة الأجوبة وتنظيم ورقة التحرير

الجزء الأول : (3ن)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1+\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم ضع جدول تغيراتها على المجال $]0;+\infty[$ — 1
2. ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 3$
   - أ. بين أن المعادلة $g(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0;+\infty[$ — 0.5
   - ب. أدرس رتابة المتتالية $(x_n)_{n\geq 3}$ — 0.5
   - ج. بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 3}$ متقاربة — 0.5
   - د. بين أن : $\forall n\geq 3:\ x_n \prec \frac{1}{n-2}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ (يمكنك استعمال $\forall x\succ 0\ \ln x\leq x-1$) — 0.5

الجزء الثاني : (8ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x+1-xe^{x-1}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\,cm$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ — 1
2. أ. أدرس تغيرات الدالة f' ثم ضع جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$ — 1
   - ب. أحسب $f'(1)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ — 1
   - ج. ضع جدول تغيرات الدالة f — 0.5
3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين α و β في $\mathbb{R}$ وأن $1.9\prec\alpha\prec 2$ و $-0.6\prec\beta\prec -0.5$ — 1
4. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ — 0.5
   - ب. حدد وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) — 0.5
   - ج. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ — 0.5
5. أنشئ المنحنى (C_f) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ — 1
6. أ. نعتبر المجال $I=\left[\frac{3}{2};2\right]$ تحقق من أن $g(I)\subset I$ — 0.5
   - ب. بين أن لكل x من I لدينا: $f(x)=0\Leftrightarrow g(x)=x$ — 0.5

الجزء الثالث : (4ن)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=g(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}:\ \frac{3}{2}\leq u_n\leq 2$ — 1
2. بين أن $\forall x\in I\ \ |g'(x)|\leq\frac{1}{6}$ — 0.5
3. أ. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}:\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{6}|u_n-\alpha|$ — 1

ب. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\ :\left\|u_n-\alpha\right\|\le\left(\frac{1}{6}\right)^n(2-\alpha)$	0.5
ج. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها	0.5
د.حدد أصغر عدد صحيح طبيعي p بحث يكون لدينا $\left\|u_p-\alpha\right\|\le 10^{-6}$	0.5
<u>الجزء الرابع</u>	(5ن)
لتكن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} v_1=1+e^{-1} \\ v_{n+1}=\frac{v_n}{n}\left(3n-1+f(-n)\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$	
1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ v_{n+1}=v_n\left(1+e^{-n-1}\right)$	0.25
2. بين أن : $\forall t\in\left]0;+\infty\right[\ :t-\frac{t^2}{2}\prec\ln(1+t)\prec t$	1
3. بين أن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ تزايدية قطعا	0.25
4. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ \ln(v_n)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+e^{-k}\right)$	1
5. ليكن a من المجال $\left]1;+\infty\right[$ نضع : $T_n(a)=\sum_{k=1}^{n}a^{-k}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$	
احسب المجموع $T_n(a)$ بدلالة n و a ثم حدد $\lim_{n\to+\infty}T_n(a)$	1
6. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ :T_n(e)-\frac{1}{2}T_n\left(e^2\right)\prec\ln(v_n)\prec T_n(e)$	0.5
7. أ. بين أن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ مكبورة ومتقاربة	0.5
ب. لتكن $\lim_{n\to+\infty}v_n=\lambda$	
بين أن $\exp\left(\frac{2e+1}{2\left(e^2-1\right)}\right)\prec\lambda\prec\exp\left(\frac{1}{e-1}\right)$	0.5