أهداف الدرس

- تعرف دالة مكبورة ، مصغورة ، محدودة، دورية.
- توظيف دورية دالة لاختصار مجموعة دراستها .
- توظيف دورية دالة في التمثيل المبياني .
- التمكن من مقارنة دالتين مبيانيا و جبريا .
- تعرف رتابة دالة .
- تعرف مركب دالتين .
- التمكن من دراسة تغيرات الدوال : $f+\alpha$ و αf و $g\circ f$
- (انطلاقا من تغيرات f و g).
- تمثيل الدالتين $x\mapsto\sqrt{x+a}$ و $x\mapsto ax^3$.

توظيف التمثيل المبياني لدالة أو جدول تغيراتها لتحديد صورة مجال .

القدرات المنتظرة

- استنتاج تغيرات دالة أو مطاريفها انطلاقا من تمثيلها المبياني أو من جدول تغيراتها.
- التعرف على تغيرات الدوال من الشكل $f+\lambda$ و λf انطلاقا من تغيرات الدالة f
- مقارنة تعبيرين باستعمال مختلف التقنيات.
- استعمال التمثيل المبياني أو جدول تغيراتها لتحديد صورة مجال ، حل بعض المعادلات و المتراجحات.
- تحديد تغيرات $g o f$ انطلاقا من تغيرات f و g .

فقرات الدرس

- الدالة المكبورة – المصغورة – المحدودة
- الدالة الدورية
- مطاريف دالة عددية
- مقارنة دالتين
- العمليات على الدوال
- صورة مجال بدالة عددية
- رتابة دالة عددية

الدوال من النوع $x\mapsto\sqrt{x+a}$ و $x\mapsto ax^3$.

I)-الدالة المكبورة- الدالة المصغورة- الدالة المحدودة
Fonction majorée –fonction minorée – fonction bornée

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.
- نقول إن f دالة مكبورة على I إذا كان : $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) \le M$.
- نقول إن f دالة مصغورة على I إذا كان : $\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) \ge m$.
- نقول إن f دالة محدودة على I إذا كانت مكبورة و مصغورة :
$\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in I, m \le f(x) \le M$

أمثلة

- بين أن الدالة العددية $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1} - x^2$ مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.
- بين أن الدالة العددية $g : x \mapsto x - 1 + \sqrt{x^2+2x+3}$ مصغورة بالعدد -2.

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.
f دالة محدودة على I $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in I, |f(x)| \le M$

مثال

بين أن الدالة العددية $f : x \mapsto \frac{\sin x}{1+x^2}$ دالة محدودة على $\mathbb{R}$.

II)-الدالة الدورية: **Fonction périodique**

تعريف

لتكن f دالة عددية و D مجموعة تعريفها.
نقول إن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث:
$$\begin{cases} \forall x \in D, x+T \in D, x-T \in D \\ \forall x \in D, f(x+T) = f(x) \end{cases}$$
- العدد T يسمى دورا (**une période**) للدالة f.
- أصغر دور موجب قطعا ل f يسمى دور الدالة (**la période**) f.

أمثلة

- الدالتان $x \mapsto \cos \omega x$ و $x \mapsto \sin \omega x$ دالتان دوريتان دورهما $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- الدالة $x \mapsto \tan x$ دالة دورية دورها $T = \pi$.

خاصية

- إذا كان T دورا لدالة عددية f فإن $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in I, f(x+nT) = f(x)$

ملاحظة

إذا كانت f دالة دورية دورها T و D مجموعة تعريفها و $x_0 \in D$ فإنه:
- يكفي دراسة تغيرات f على كل مجموعة من النوع:
$D_k = D \cap [x_0 + kT, x_0 + (k+1)T[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ،

وفي الغالب نأخذ المجموعة $D \cap [0,T[$ أو المجموعة $D \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$.
- يستنتج منحنى f على المجموعة D_k من منحنى f على المجموعة D_0 بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(kT, 0)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

تمرين01

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - E(x)$
حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .
1) أ- بين أن الدالة f دالة دورية دورها $T = 1$
ب- استنتج أن مجموعة دراستها هي $D = [0,1[$.
2) أ- بين أن $\forall x \in D, f(x) = x$.
ب- أرسم منحنى الدالة f في م.م.م. $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II)-مطاريف دالة عددية: **Extremums d'une fonction numérique**

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. و $a \in I$.
- نقول إن العدد $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على المجال I ، إذا كان: $\forall x \in I, f(x) \le f(a)$.
- نقول إن العدد $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على المجال I، إذا كان: $\forall x \in I, f(x) \ge f(a)$.

أمثلة

- الدالة $f : x \mapsto x^2 + 1$ تقبل القيمة القصوى على $\mathbb{R}$ عند الصفر هي $f(0) = 1$
- إذا كانت f دالة عددية معرفة على $[-1,4]$ و جدول تغيراتها هو:

x	-1		0		2		4
$f(x)$	1	↘	-1	↗	3	↘	0

فإن $f(0)$ هي القيمة الدنيا ل f و $f(2)$ هي القيمة القصوى ل f على $[-1,4]$

تعريف

إذا كانت الدالة f تقبل قيمة دنيا أو قصوى عند x_0 فإنها تقبل مطرافا عند x_0.

أمثلة

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.
1) بين أن $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.
2) بين أن $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على $\mathbb{R}$.

III)-مقارنة دالتين – التأويل الهندسي

1)- تساوي دالتين:

تعريف

لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما.

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} D_f = D_g \\ \forall x \in D_f, f(x) = g(x) \end{cases}$$

2)- مقارنة دالتين: Comparaison de deux fonctions

تعريف

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I .
$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ على المجال I

3)- التأويل الهندسي: Interprétation géométrique

$f \leq g$ على مجال I يعني هندسيا أن منحنى الدالة f على المجال I يوجد تحت منحنى الدالة g على I .

ملاحظة

- $f < g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) < g(x)$ على I .
- $f \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \geq 0$ على I (منحنى f يوجد فوق محور الأفاصيل).

تمرين02

1)- قارن الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$f(x) = x^2 - 3x + 5$ و $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.
2)- قارن مبيانيا ثم جبريا الدوال: $f : x \mapsto \sqrt{x}, g : x \mapsto x^2, h : x \mapsto x$

IV)-عمليات على الدوال: Opérations sur les fonctions

1)-مجموع و فرق و جداء و خارج دالتين

somme - différence - produit et quotient de deux fonctions

تعريف

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على نفس المجموعة I.

- مجموع الدالتين f و g هي الدالة المعرفة على I بما يلي:
$\forall x \in I, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- فرق الدالتين f و g هي الدالة المعرفة على المجموعة I بما يلي:
$\forall x \in I, (f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- جداء الدالتين f و g هي الدالة المعرفة على المجموعة I بما يلي:
$\forall x \in I, (fg)(x) = f(x)g(x)$.
- خارج الدالتين f و g هي الدالة المعرفة على المجموعة I بما يلي:
$\forall x \in I, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $\forall x \in I, g(x) \neq 0$

مثال

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على $f(x) = 1 + x$ و $g(x) = 1 + x^2$.
حدد الدوال العددية التالية: $f+g$ و $f-g$ و fg و $\frac{f}{g}$ على $\mathbb{R}$.

2)-مركب دالتين: composée de deux fonctions

تعريف

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على D_f و D_g.
نضع: $D = \left\{x \in \mathbb{R} / \ x \in D_f \ D \quad \in (x)_g \right\}$

- الدالة العددية h المعرفة على D بما يلي: $\forall x \in D, h(x) = g(f(x))$
تسمى مركب الدالتين f و g وفي هذا الترتيب. و يرمز لها بالرمز $g \circ f$.

ملاحظة

$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/\ x\in D_f$ و $f(x)\in D_g\}$

$x\in D_{g\circ f}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ و $x\in D_f$ و $f(x)\in D_g$

تمرين03

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ و $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$

- حدد كل من D_f و D_g و $D_{g\circ f}$. ثم حدد تعبير الدالة $g\circ f$.

تمرين04

لتكن f و h الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي:
$f(x)=x-1$ و $h(x)=2x^2+3x-1$.

- حدد دالة عددية g بحيث: $h=g\circ f$.

V)-صورة مجال بدالة عددية: l'image d'un intervalle par une fonction numerique

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة عل مجال I من $\mathbb{R}$ ضمن مجموعة تعريفها D_f.
صورة المجال I بالدالة f هي المجموعة التي يرمز لها ب $f(I)$ و المعرفة بالإدراك كما يلي: $f(I)=\{f(x)/\ x\in I\}$.

ملاحظات

- $y\in f(I)\Leftrightarrow \exists x\in I\ /\ y=f(x)$
- $x\in I\Rightarrow f(x)\in f(I)$
- $f(I)\subset J\Leftrightarrow \forall x\in I, f(x)\in J$

تمرين05

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2$. و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

1. ضع جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم (C_f) .
2. حدد مبيانيا: $f([0,1])$ و $f(]-\infty,1])$ و $f(]-1,2])$.

VI)-رتابة دالة عددية: Monotonie d'une fonction numérique

1)-منحى تغيرات الدالة: Sens de variations d'une fonction

تعريف

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها.

- f تزايدية قطعا على I $\Leftrightarrow \forall(x_1,x_2)\in I^2,(x_1\prec x_2\Rightarrow f(x_1)\prec f(x_2))$.
- f تناقصية قطعا على I $\Leftrightarrow \forall(x_1,x_2)\in I^2,(x_1\prec x_2\Rightarrow f(x_1)\succ f(x_2))$.
- f ثابتة على I $\Leftrightarrow \forall(x_1,x_2)\in I^2, f(x_1)=f(x_2)$.

ملاحظة

- تدرس رتابة f على I بدراسة إشارة معدل التغير $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$
مع x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من I
- نقول إن f رتيبة قطعا على I إذا كانت تزايدية قطعا أو تناقصية قطعا على I.

مثال

- أدرس رتابة الدالة: $f : x \mapsto x^2 - x$ على كل من المجالين $[1,+\infty[$ و $]-\infty,1]$.
- أدرس رتابة الدالة: $g : x \mapsto \sqrt{x}$ على المجال $[0,+\infty[$.

خاصية

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة للصفر.
و ليكن I مجالا ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و I' مماثل I بالنسبة للصفر.

- إذا كانت f زوجية فإن رتابة f على المجال I هي عكس رتابة f على I'.
- إذا كانت f دالة فردية فإن f لها نفس الرتابة على كل من المجالين I و I'

2)-أ- رتابة مركب دالتين رتيبتين

خاصية

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على مجالين I و J
بحيث: $f(I) \subset J$.

- إذا كانت رتابة f على I هي نفس رتابة g على J فإن $g \circ f$ تزايدية على I .
- إذا كانت رتابة f على I هي عكس رتابة g على J فإن $g \circ f$ تناقصية على I

خاصية

لتكن f دالة عددية رتيبة قطعا على مجال I من $\mathbb{R}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.

- الدالة $g = f + \lambda$ لها نفس رتابة f على المجال I.
- الدالة $g = \lambda f$ لها نفس رتابة الدالة f على I إذا كان $\lambda > 0$ ورتابتها هي عكس رتابة الدالة f على I إذا كان $\lambda < 0$.

برهان

- نضع: $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = x + \lambda$ و نحصل على: $\forall x \in I, g(x) = u \circ f(x)$.
- نضع: $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \lambda x$ و نحصل على: $\forall x \in I, g(x) = v \circ f(x)$.

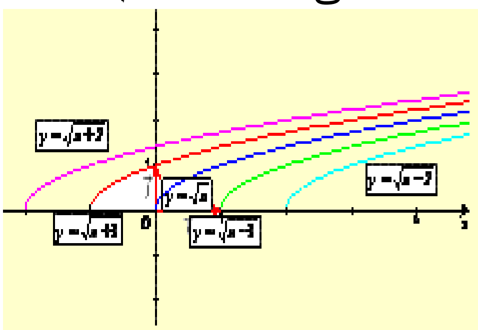
VII)-التمثيل المبياني للدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{x+a}$ و $x \mapsto ax^3$.

- الدالة $f : x \mapsto \sqrt{x+a}$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = [-a,+\infty[$
الدالة f تزايدية قطعا على $D_f = [-a,+\infty[$
جدول تغيرات f

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	

منحنى الدالة: $x \mapsto \sqrt{x+a}$



ملاحظة

يستنتج منحنى الدالة $x \mapsto \sqrt{x+a}$ من منحنى $x \mapsto \sqrt{x}$ بالإزاحة ذات المتجهة $-a\vec{i}$.

- الدالة $g : x \mapsto ax^3$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$.

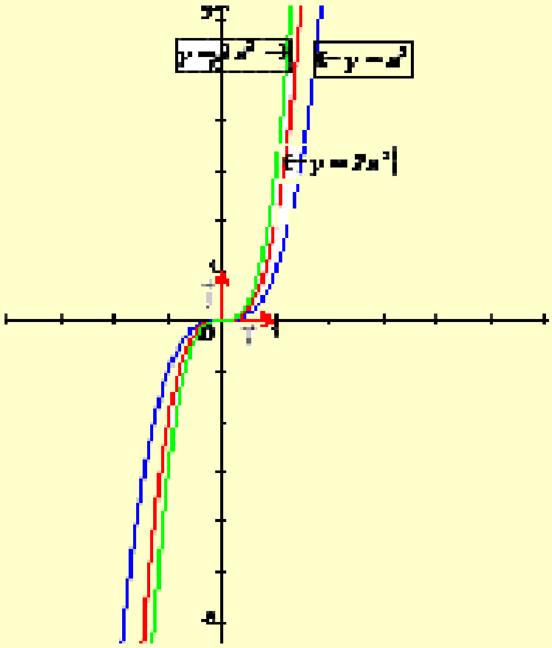
مجموعة تعريف الدالة g هي $D_g =]-\infty,+\infty[$.

إذا كان $a > 0$ فإن الدالة g تزايدية قطعا على R .

جدول تغيرات g إذا كان $a > 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

منحنى g في الحالات: $a = 1, 2, 3$



إذا كان $a < 0$ فإن الدالة g تناقصية قطعا على R .

جدول تغيرات g إذا كان $a < 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$

منحنى g في الحالات: $a = -1, -2, -3$