الاشتقاق – الدالة العكسية – مبرهنة التزايدات المنتهية

القدرات المنتظرة

- التمكن من مشتقات الدوال الاعتيادية
- تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة دالتها المشتقة
- تحديد مشتقة و رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال .
- حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية و القيم القصوية
- تحديد الدوال الأصلية للدوال الاعتيادية
- استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد الدوال الأصلية على مجال

فقرات الدرس

- اشتقاق دالة عددية
  - قابلية الاشتقاق في نقطة
  - الاشتقاق و الاتصال
  - الدالة المشتقة
- مشتقة مركب دالتين
- الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال
  - مشتقة الدالة العكسية
- دوال عكسية اعتيادية
  - دالة قوس الظل
  - دالة الجذر من الرتبة n
- مبرهنة رول
- مبرهنة التزايدات المنتهية
- متفاوتة التزايدات المنتهية

I)-اشتقاق دالة عددية: (تذكير و إضافات)

1)- قابلية اشتقاق دالة في نقطة

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0.

- نقول إن f قابلة للاشتقاق في x_0،إذا وجد عدد حقيقي l بحيث $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$
- العدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 و يرمز له بالرمز $f'(x_0)$ أو $\frac{df}{dx}(x_0)$

ملاحظة

بوضع : $h=x-x_0$ لدينا: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0}$

2)- الاشتقاق و الاتصال

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I مركزه x_0. ($I=]x_0-\alpha,x_0+\alpha[$ حيث $\alpha>0$).

- تكون f قابلة للاشتقاق في x_0،إذا وجد عدد حقيقي l ،والدالة φ معرفة $J=]-\alpha,\alpha[$ بحيث : لكل h من J : $f(x_0+h)=f(x_0)+lh+h\varphi(h)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)$.

برهان

- نفترض أن f قابلة للاشتقاق في x_0 :

لدينا: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=0$

نعتبر الدالة φ المعرفة على $J=]-\alpha,\alpha[$ بما يلي: $\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=0,h\neq 0\\ \varphi(0)=0\end{cases}$

و نحصل على : $f(x_0+h)=f(x_0)+lh+h\varphi(h)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)$ حيث $l=f'(x_0)$.

- عكسيا إذا كان $f(x_0+h)=f(x_0)+lh+h\varphi(h)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)$ فإن f قابلة للاشتقاق في x_0 و $l=f'(x_0)$.

خاصية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإنها متصلة في x_0.

برهان

إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإنه حسب الخاصية:

$f(x_0+h)=f(x_0)+lh+h\varphi(h)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)$.

إذن $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)+lh+h\varphi(h)\right)=f(x_0)$

إذن f متصلة في x_0.

ملاحظة

- عكس الخاصية السابقة غير صحيح. (الدالة $f:x\mapsto|x|$ متصلة و غير قابلة للاشتقاق في 0).
- إذا كانت f غير متصلة في x_0 ، فإنها غير قابلة للاشتقاق في x_0.

تمرين: النهايات و العدد المشتق

- أحسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$ و $\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x - \sqrt{2}}{2\sin x - \sqrt{2}}$.

II)- الدالة المشتقة : (تذكير و إضافات)

1)- قابلية اشتقاق دالة على مجال

تعريف

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

➢ الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على المجال I، ونرمز لها بالرمز f'.

2)- مشتقة مركب دالتين

خاصية

لتكن f و g دالتين معرفتين على التوالي على مجالين I و J بحيث: $f(I)\subset J$. و ليكن $x_0\in I$.

➢ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ ، فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 و لدينا : $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

➢ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ ، فإن $g\circ f$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $\forall x\in I, (g\circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

برهان

- $$\lim_{x\to x_0} \frac{g\circ f(x) - g\circ f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g\circ f(x) - g\circ f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$= \lim_{y\to f(x_0)} \frac{g(y) - (y_0)}{f(x) - f(x_0)} \times f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \cos(1+x^2)$.

لدينا: الدالة $u : x \mapsto 1+x^2$ قابلة للاشتقاق على المجال $I = \mathbb{R}$.

و لدينا: الدالة $v : x \mapsto \cos x$ قابلة للاشتقاق على المجال $J = \mathbb{R}$.

و بما أن $f = v\circ u$ و $u(\mathbb{R})\subset J = \mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x) = -2x\sin(1+x^2)$.

نتائج

➢ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f^n قابلة للاشتقاق على I : $\forall n\in\mathbb{N}^*, (f^n)' = nf' f^{n-1}$

➢ إذا كانت f قابلة للاشتقاق و $f\neq 0$ على I فإن f^n قابلة للاشتقاق على I :
$\forall n\in\mathbb{Z}^*, (f^n)' = nf' f^{n-1}$

➢ إذا كانت f قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على I فإن $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I : $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

➢ الدالتان $t\mapsto \cos(\omega t+\varphi)$ و $t\mapsto \cos(\omega t+\varphi)$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$\left(\sin(\omega t+\varphi)\right)' = \omega\cos(\omega t+\varphi) \quad \text{و} \quad \left(\cos(\omega t+\varphi)\right)' = -\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

III)- الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال .

1)- مبرهنة الدالة العكسية .

خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I ضمن $\mathbb{R}$ فإن f تقابل من I نحو المجال $f(I)$

برهان

- f دالة متصلة على مجال I، إذن $f(I)$ مجال من $\mathbb{R}$ و $\forall y\in f(I),\exists x\in I / f(x)=y$
- و لكل عنصرين مختلفين a و b من I لدينا:

$a\neq b\Rightarrow a<b$ أو $a>b$

$\Rightarrow f(a)<f(b)$ أو $f(a)>f(b)$ لأن f رتيبة قطعا على I.

$\Rightarrow f(a)\neq f(b)$

و بالتالي $\forall y\in f(I),\exists! x\in I / f(x)=y$

ملاحظة

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I، و f^{-1} دالتها العكسية.

- $\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x)=y \\ x\in f(I)\end{cases}$.
- $\forall x\in I, f^{-1}\circ f(x)=x$.
- $\forall x\in f(I), f\circ f^{-1}(x)=x$.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]-\infty,-1\right[$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x-2}$.

1)- بين أن الدالة f تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده.

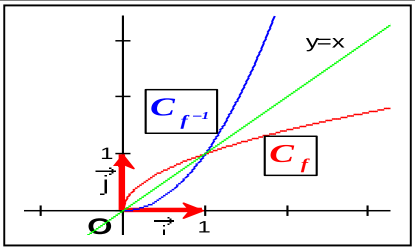
2)- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

2)- خاصيات الدالة العكسية

خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I، و f^{-1} دالتها العكسية فإن:

- f^{-1} متصلة على المجال $f(I)$.
- f^{-1} رتيبة قطعا على المجال $f(I)$ و لها نفس رتابة f على المجال I.
- منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى f بالنسبة للمنصف الأول للمعلم في معلم متعامد ممنظم.



- مثال لمنحنى f و منحنى f^{-1} في معلم متعامد ممنظم

➢ المستقيم ذو المعادلة $(y=x)$ هو المنصف الأول للمعلم.

برهان

• نقبل أن f^{-1} متصلة على المجال $f(I)$.

• لكل عنصرين مختلفين y_1 و y_2 من المجال $f(I)$، لدينا:

$y_1\in f(I)\Rightarrow \exists!\, x_1\in I\,/\, f(x_1)=y_1$ و $y_2\in f(I)\Rightarrow \exists!\, x_2\in I\,/\, f(x_2)=y_2$

إذن $f^{-1}(y_1)=x_1$ و $f^{-1}(y_1)=x_1$

و منه : $\dfrac{x_1-x_2}{f(x_1)-f(x_2)}=\dfrac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)}{y_1-y_2}$

إذن معدلي تغير f و f^{-1} لهما نفس الإشارة، ومنه f و f^{-1} لهما نفس منحى التغيرات.

• $M(x,y)\in(C_f)\Leftrightarrow y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\Leftrightarrow M'(y,x)\in(C_{f^{-1}})$

إذن $(C_{f^{-1}})$ و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي: $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

1) أ- تحقق من الدالة f متصلة على المجال I.

ب- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.

2) أ- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.

ب- أرسم C_f و $C_{f^{-1}}$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

3) مشتقة الدالة العكسية Dérivée de la fonction réciproque

خاصية

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I ضمن $\mathbb{R}$ ، و $x_0\in I$.

➢ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 بحيث $f'(x_0)\neq 0$ ، فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$

و لدينا: $(f^{-1})'(f(x_0))=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

➢ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و $(\forall x\in I, f'(x)\neq 0)$، فإن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)$

و لدينا: $\forall y\in f(I):(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}(y)}$.

برهان

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

ملاحظة

➢ $\forall x\in I, f^{-1}\circ f(x)=x\Rightarrow \forall x\in I,(f^{-1}\circ f)'(x)=1$.

$\Rightarrow \forall x\in I,(f^{-1})'(f(x))\,f'(x)=1$

$$\Rightarrow \forall x\in I,\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)=\frac{1}{f'(x)}$$

➢ $\forall x\in f(I), f\circ f^{-1}(x)=x \Rightarrow \forall x\in f(I),\left(f\circ f^{-1}\right)'(x)=1$

$$\Rightarrow \forall x\in f(I), f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x)=1$$

$$\Rightarrow \forall x\in f(I),\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=[1,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x^3-x-1$.

1)- بين أن الدالة f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

2)- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا و حيدا ω في I.

3)- بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق في -1 ثم أحسب $\left(f^{-1}\right)'(-1)$

4)- بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق في 0 ثم أحسب $\left(f^{-1}\right)'(0)$

IV)- دوال عكسية اعتيادية

1)- دالة قوس الظل : fonction Arctangente

نشاط: لتكن f قصور الدالة $x\mapsto \tan x$ على المجال $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

- بين أن الدالة f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

تعريف

➢ الدالة $x\mapsto \tan x$ تقابل من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$.

➢ دالتها العكسية تسمى دالة قوس الظل و نرمز لها بالرمز $Arc\tan$

نتائج

➢ $(\forall x\in\mathbb{R})\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right), Arc\tan x=y \Leftrightarrow \tan y=x$.

➢ $(\forall x\in\mathbb{R}), \tan(Arc\tan x)=x$.

➢ $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right), Arc\tan(\tan x)=x$.

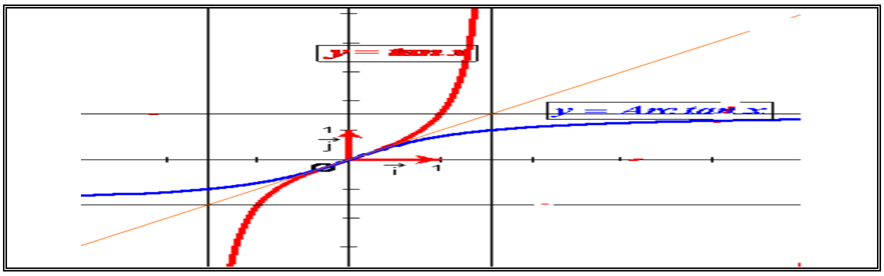
➢ $(\forall x_1\in\mathbb{R})(\forall x_2\in\mathbb{R}), Arc\tan x_1=Arc\tan x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

➢ $(\forall x_1\in\mathbb{R})(\forall x_2\in\mathbb{R}), Arc\tan x_1<Arc\tan x_2 \Leftrightarrow x_1<x_2$

➢ دالة قوس الظل متصلة على $\mathbb{R}$

➢ $\lim_{x\to-\infty} Arc\tan x=-\frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x\to+\infty} Arc\tan x=+\frac{\pi}{2}$.

➢ **منحنى دالة قوس الظل**



أمثلة

- احسب $Arc\tan\left(\tan\left(\frac{2012\pi}{3}\right)\right)$ و $\tan\left(Arc\tan\left(\frac{2012\pi}{3}\right)\right)$
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $Arc\tan x = Arc\tan\frac{1}{2} + Arc\tan\frac{1}{3}$.
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $Arc\tan x + Arc\tan\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{4}$
- احسب النهايات عند محدات مجموعة تعريف الدالة $x \mapsto (x+1)Arc\tan\frac{1}{x}$:

خاصية: مشتقة الدالة Arctan

- الدالة $Arc\tan$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}, (Arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $Arc\tan\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا: $(Arc\tan\circ u)' = \frac{u}{1+u^2}$

برهان

- الدالة $f : x \mapsto \tan x$ المعرفة على $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ قابلة للاشتقاق على I و $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$

إذن الدالة $Arc\tan$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} = f(I)$ و لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (Arc\tan x)' = \frac{1}{\tan'\circ(Arc\tan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(Arc\tan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

- $\forall x \in I, (Arc\tan\circ u(x))' = (Arc\tan'\circ u(x)) \times u'(x) = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

أمثلة

- أدرس قابلية اشتقاق الدالة: $f : x \mapsto Arc\tan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$ و حدد f'
- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^*, Arc\tan|x| + Arc\tan\frac{1}{|x|} = \frac{\pi}{2}$
- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, Arc\tan\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) - \frac{1}{2}Arc\tan\sqrt{x} = \frac{\pi}{4}$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x + (x^2-1)Arc\tan x$

1)- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = x$.

2)- نعتبر الدالة φ المعرفة بما يلي: $\varphi(x)=\frac{x}{1+x^2}+Arc\tan x$

أدرس تغيرات الدالة φ و استنتج إشارة f

3)- لتكن (u_n) المتتالية العددية بحيث : $u_0\in]0,1[$ و $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$

ا- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}, 0<u_n<1$.

ب- بين إن المتتالية (u_n) تناقصية و استنتج أنها متقاربة و حدد نهاية المتتالية (u_n).

2)- دالة الجذر من الرتبة n. Fonction racine nième

نشاط

لتكن f قصور الدالة $x\mapsto x^n$ على المجال $I=[0,+\infty[$، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

- بين أن الدالة f تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده.

أ)-تعريف

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

- الدالة $x\mapsto x^n$ تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ و تقابلها العكسي يسمى دالة الجذر من الرتبة n
- يرمز لهذه الدالة بالرمز $\sqrt[n]{\ }$، و يرمز لصورة العدد x بهذه الدالة بالرمز $\sqrt[n]{x}$.
- العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد الحقيقي x.

ب)- نتائج

- $(\forall n\in\mathbb{N}^*),(\forall a\in\mathbb{R}^+),(\forall b\in\mathbb{R}^+),(\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow a=b^n)$.
- $(\forall n\in\mathbb{N}^*),(\forall a\in\mathbb{R}^+),(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a$.
- $(\forall n\in\mathbb{N}^*),(\forall a\in\mathbb{R}^+),(\forall b\in\mathbb{R}^+),(\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a=b)$.
- $(\forall n\in\mathbb{N}^*),(\forall a\in\mathbb{R}^+),(\forall b\in\mathbb{R}^+),(\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a<b)$.
- الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ متصلة على المجال $\mathbb{R}^+$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.

ملاحظة

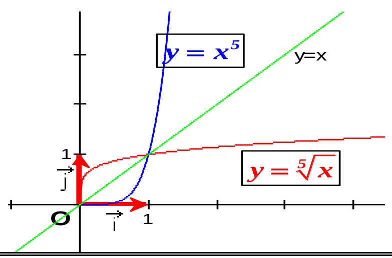
$\begin{cases}x=\sqrt[n]{y}\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^n\\ x\ge 0\end{cases}$. $\sqrt[1]{x}=x$ و $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$

أمثلة

$\sqrt[3]{8}=2$ لأن $2^3=8$ $\sqrt[4]{16}=2$ لأن $2^4=16$ $\sqrt[5]{32}=2$.

ملاحظة

- منحنى الدالة $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ هو مماثل منحنى قصور الدالة $x\mapsto x^n$ على المجال $[0,+\infty[$ بالنسبة للمنصف الأول للمعلم، في مستوى منسوب إلى معلم متعاعد ممنظم.
- (حالة $n=5$) $\leftarrow$



ج)-المعادلة $x^n=a$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ و $a\in\mathbb{R}$

- إذا كان $a=0$ فإن $x^n=0 \Leftrightarrow x=0$ و منه $S=\{0\}$
- إذا كان $a>0$ و n فردي فإن $x^n=a \Leftrightarrow x=\sqrt[n]{a}$ و منه $S=\{\sqrt[n]{a}\}$
- إذا كان $a>0$ و n زوجي فإن $x=-\sqrt[n]{a}$ أو $x^n=a \Leftrightarrow x=\sqrt[n]{a}$ و منه $S=\{\sqrt[n]{a},-\sqrt[n]{a}\}$
- إذا كان $a<0$ و n فردي فإن $x^n=a \Leftrightarrow (-x)^n=-a \Leftrightarrow x=\sqrt[n]{-a}$ و منه $S=\{\sqrt[n]{-a}\}$
- إذا كان $a<0$ و n زوجي فإن $S=\varnothing$

أمثلة

- حل في $\mathbb{R}$ المعادلات : $x^5=32$ $\quad x^4=-16$ $\quad x^3=-27$ $\quad x^6=64$
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$.
- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\sqrt[6]{2x-3}<2$.
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-12=0$

د- اتصال و نهاية دالة الجذر من الرتبة n

خاصية

لتكن f دالة معرفة و موجبة على مجال I.

- إذا كانت f دالة متصلة على المجال I فإن الدالة $\sqrt[n]{f}$ متصلة على المجال I.
- إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و $l\geq 0$ فإن $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$.
- إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=+\infty$.

ملاحظة

الخاصيتان الأخيرتان صحيحتان أيضا إذا كان x يؤول إلى x_0 على اليمين أو على اليسار أو إلى $\pm\infty$.

أمثلة

- $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x-1}$ $\quad$ • $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$ $\quad$ • $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$
- $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$ $\quad$ • $\lim_{x\to \pi}\frac{\sqrt[3]{2-\cos x}-\sqrt[3]{3}}{x-\pi}$

ه- العمليات على الجذور من الرتبة n.

خاصية

ليكن m و n عنصرين من $\mathbb{N}^*$ ، و a و b عنصرين من $\mathbb{R}^+$.

1)- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $\qquad$ 2)- $\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ و $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, إذا كان $b\neq 0$.

3)- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ $\qquad$ 4)- $\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}$

البرهان

1. لدينا: $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$ و منه $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$.
2. لدينا: $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\sqrt[n]{a}^n}{\sqrt[n]{b}^n}=\frac{a}{b}$ و منه: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

3. لدينا: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}$ و منه: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

4. لدينا: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[mn]{a^m}$.

أمثلة

- بسط ما يلي: $A = \dfrac{\sqrt[4]{9}\sqrt[3]{\sqrt[2]{3}\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[5]{81}\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$ و $B = \dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$.
- قارن العددين $\sqrt[3]{4}$ و $\sqrt[4]{5}$
- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{4x}$
- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*),(\forall m \in \mathbb{N}^*),(\forall a \in \mathbb{R}_*^+),\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}\right)$
- بسط مقامات الكسور التالية: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ ، $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$ ، $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$

تمرين

- نعتبر العدد الحقيقي $A = \sqrt[3]{3\sqrt{21}+8} - \sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}$.

1)- بين أن A هو حل للمعادلة : $x^3 + 15x - 16 = 0$.

2)- استنتج قيمة مبسطة للعدد A

5)-القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا

puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif

تعريف

ليكن x عدد حقيقيا موجبا قطعا و r عددا جذريا غير منعدم.

نسمي القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r العدد x^r المعرف بما يلي: $x^r = \sqrt[n]{x^m}$

حيث: $m \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{N}^*, r = \dfrac{m}{n}$

ملاحظات

- إذا كان $\dfrac{m'}{n'} = \dfrac{m}{n}$ فإن: $\sqrt[n']{x^{m'}} = \sqrt[n]{x^m}$.
- لكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$ ، و لكل x من $\mathbb{R}_*^+$ ، فإن: $(x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r')$.
- لكل x من $\mathbb{R}_*^+$، و لكل n من $\mathbb{N}^*$، لدينا: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ و $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ و $x^0 = 1$.

أمثلة

- $32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32}^2 = 2^2 = 4$
- $\sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
- $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16}^3 = 8$.

خاصية

ليكن $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

- إذا كان $\alpha > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$
- إذا كان $\alpha < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$

برهان

ليكن $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

- إذا كان $\alpha > 0$ فإن $\alpha = \frac{p}{q}$ ، $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[q]{n^p} = +\infty$
- إذا كان $\alpha < 0$ فإن $\alpha = -\frac{p}{q}$ ، $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. و منه: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[q]{n^{-p}} = 0$

6)- العمليات على القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا

خاصيات

لكل x y من $\mathbb{R}_*^+$ و لكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$ لدينا:

- $x^r x^{r'} = x^{r+r'}$
- $x^r y^r = (xy)^r$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$
- $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$
- $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

نتائج: مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و مشتقة الدالة $x \mapsto x^r$.

- الدالة $(n \in \mathbb{N}^*)$ $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$.
- الدالة $(r \in \mathbb{Q}^*)$ $x \mapsto x^r$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, (x^r)' = rx^{r-1}$.

ملاحظة

- الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_*^+$ بما يلي: $x \mapsto x^{\frac{m}{n}}$ هي مركب الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}_*^+$ بما يلي: $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ و $x \mapsto x^m$.

مثال1

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x}$.

الدالة f معرفة على المجال $[0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. (مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$).

و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$.

مثال2

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^3 + x^{\frac{2}{3}}$.

الدالة f معرفة على $]0,+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. (لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$). و لدينا: $\forall x \in]0,+\infty[, f'(x) = 3x^2 + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 3x^2 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

خاصية2

- إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ ، $(n \in \mathbb{N}^*)$ قابلة للاشتقاق على المجال I ، و لدينا: $\forall x \in I, \left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$.

➢ إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على مجال I فإن الدالة $x \mapsto (u(x))^r$ ، $(r \in \mathbb{Q}^*)$
قابلة للاشتقاق على المجال I ، و لدينا: $\forall x \in I, \left((u(x))^r\right)' = ru'(x)(u(x))^{r-1}$.

مثال1

- لنحدد مشتقة الالدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2 - x}$.

لدينا : الدالة f معرفة على $D_f =]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$.

الدالة $x \mapsto x^2 - x$ موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.

إذن f قابلة للاشتقاق على المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ و لدينا:

$$\forall x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[, f'(x) = 1 - \frac{(x^2 - x)'}{3\left(\sqrt[3]{x^2 - x}\right)^2} = 1 - \frac{2x - 1}{3\left(\sqrt[3]{x^2 - x}\right)^2}.$$

مثال2

لنحدد مشتقة الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$.

لدينا : مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

الدالة $x \mapsto x^2 - 1$ موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$ ،

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$ ولدينا:

$$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[: f'(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 1)'(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{4}{3}x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)}}$$

تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [-1,+\infty[$ بما يلي: $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$.

1) – بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

2) – أحسب $f(0)$ ثم بين أن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في النقطة 1 و احسب $(f^{-1})'(1)$.

تمرين

لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(x) = 3\sqrt[3]{x + 1} - x$.

1)- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة f.

2)- بين أن $\exists! \alpha \in]2,3[\,/\, f(\alpha) = \alpha$

3)- أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} محددا $D_{f^{-1}}$.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f^{-1} على $D_{f^{-1}}$.

ج- بين أن $(f^{-1})'(\alpha) = \frac{4\alpha^2}{9 - 4\alpha^2}$

4)-أ- بين أن $\exists! \beta \in]5,6[\,/\, f(\beta) = 0$.

ب- بين أن $\forall x\in\left]-\infty,0\right[,\ f^{-1}(x)<\dfrac{x\beta^{2}}{9-\beta^{2}}+\beta$.

V)- مبرهنة التزايدات المنتهية Théorème des accroissements finis

1)- مبرهنة رول Théorème de Rolle

مبرهنة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و كان $f(a)=f(b)$ ،
فإنه يوجد على الأقل c من المجال $]a,b[$ بحيث $f'(c)=0$.

برهان

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ بحيث $f(a)=f(b)$.

- إذا كانت f ثابتة على $[a,b]$ فإن $\forall x\in[a,b],\ f'(x)$ ، إذن مبرهنة رول محققة.
- إذا كانت f غير ثابتة على $[a,b]$ و f متصلة على $[a,b]$

إذن $f([a,b])=[m,M]$ حيث M قيمة قصوى و m قيمة دنيا للدالة f على $[a,b]$
إذن لا يمكن ان يكون $M=f(a)$ و $m=f(b)$ أو العكس
إذن يوجد على الأقل c من المجال $]a,b[$ بحيث $f(c)=M$ ،أو $f(c)=m$.
و بما أن $f(c)$ مطراف للدالة f فإن $f'(c)=0$.

ملاحظة

- الاتصال على مجال مغلق $[a,b]$ شرط لازم لتطبيق مبرهنة رول.
- قابلية الاشتقاق على مجال مفتوح $]a,b[$ شرط لازم لتطبيق مبرهنة رول.
- الشرط $f(a)=f(b)$ شرط لازم لتطبيق مبرهنة رول.

2)- مبرهنة التزايدات المنتهية Théorème des accroissements finis

مبرهنة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$
فإنه يوجد c من المجال $]a,b[$ بحيث $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

برهان

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[a,b]$ بما يلي: $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$
بتطبيق مبرهنة رول للدالة g على المجال $[a,b]$ ، نحصل على النتيجة.

تمرين

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال $I=[a,b]$ بحيث $f(I)\subset I$ و $|f'(x)|\le k<1$ حيث $k>0$.

1)- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال I .
2)- لتكن (u_n) متتالية عددية بحيث $u_0 \in I$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.
بين أن $|u_n-\alpha| \le k^n |u_0-\alpha|$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$.

3)- متفاوتة التزايدات المنتهية Inégalité des accroissements finis

خاصية1

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.
إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث $\forall x\in]a,b[, m\le f'(x)\le M$ فإن :
$m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$.

برهان

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.
إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية $\exists c\in]a,b[\,/\, f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$
و حيث أن $\forall x\in]a,b[, m\le f'(x)\le M$ فإن $m\le f'(c)\le M$
و منه $m\le \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\le M$ أي $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$

مثال

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $0\le a<b$
- ➢ بين أن $\dfrac{b-a}{1+b^2}\le \operatorname{Arctan} a-\operatorname{Arctan} b\le \dfrac{b-a}{1+a^2}$
- ➢ استنتج أن: $\dfrac{1}{10}\le \operatorname{Arctan} a-\operatorname{Arctan} b\le \dfrac{1}{5}$

خاصية2

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ ، و $k\in\mathbb{R}$
إذا كان $\forall x\in]a,b[, |f'(x)|\le k$ فإن : $|f(b)-f(a)|\le k|b-a|$.

برهان

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.
إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية $\exists c\in]a,b[\,/\, f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$
و حيث أن $\forall x\in]a,b[, m\le f'(x)\le M$ فإن $m\le f'(c)\le M$
و منه $m\le \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\le M$ أي $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$

أمثلة

- ➢ بين أن $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, |\sin x-\sin y|\le |x-y|$.
- ➢ بين أن $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, |\cos x-\cos y|\le |x-y|$.

- بين أن $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |Arc\tan x - Arc\tan y| \leq |x-y|$
- بين أن $|\tan x - \tan y| \leq 4|x-y|$ لكل x و y من $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$