أهداف الدرس

- التمكن من استعمال الاستدلال المناسب حسب الوضعية المدروسة.
- التمكن من صياغة براهين و استدلالات رياضية واضحة و سليمة منطقيا .

القدرات المنتظرة

- تعرف عبارة
- تحديد قيمة حقيقة عبارة
- تعرف نفي عبارة
- تعرف فصل و عطف عبارتين
- تعرف استلزام و تكافؤ عبارتين
- توظيف العمليات على العبارات
- تحديد نفي استلزام
- تعرف دالة عبارية
- تعرف و توظيف المكممات
- تعرف الاستدلالات الرياضية(الخلف-المضاد للعكس-فصل الحالات-التكافؤ----الترجع)
- توظيف الاستدلالات الرياضية

I)-العبارات – العمليات على العبارات

1)-العبارات : **Les propositions**

تعريف

نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا .
نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p , q, r ......

أمثلة

العبارة p " كل عدد زوجي قابل للقسمة على 4" عبارة خاطئة.
العبارة q " $\sqrt{2}$ عدد لا جذري " عبارة صحيحة.
العبارة r " الدالة $x \to x^2$ حيث $x \in \mathbb{R}$ دالة زوجية " عبارة صحيحة .
العبارة s " لكل x من $\mathbb{R}$, $x^2 > 0$ " عبارة خاطئة.

ملاحظات

- لا يمكن لعبارة أن تكون صحيحة و خاطئة في نفس الوقت .
- نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة هذه العبارة .
- الرمز 1 أو V يرمز لعبارة صحيحة و الرمز 0 أو F يرمز لعبارة خاطئة .

2)-العمليات على العبارات

أ-نفي عبارة : **La négation d'une proposition**

تعريف

نفي عبارة p هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة و نرمز لها بالرمز $\overline{p}$.

أمثلة

p : " $\sqrt{2} \leq \sqrt{3}$ " ‏ ‏ ‏ $\overline{p}$: " $\sqrt{2} > \sqrt{3}$ "

q : " $\pi \in \mathbb{Q}$ " ‏ ‏ ‏ $\overline{q}$: " $\pi \notin \mathbb{Q}$ "

ملاحظة

يمكن تمثيل جدولي حقيقة العبارتين p و $\overline{p}$ كما يلي:

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

ب-عطف عبارتين : **Conjonction de deux propositions**

تعريف

عطف العبارتين p و q هو عبارة يرمز لها بالرمز (p و q) أو أيضا ($p \wedge q$) و التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان صحيحتان معا.

ملاحظة

- جدول حقيقة العبارة(p وq) هو:
- العطف تبادلي و تجميعي .

p	q	pوq
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ج-فصل عبارتين : **Disjonction de deux propositions**

تعريف

فصل عبارتين p و q هو عبارة يرمز لها بالرمز (p أو q) أو أيضا ($p \vee q$) والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان خاطئتان معا.

ملاحظة

- جدول حقيقة العبارة(p أو q) هو:
- الفصل المنطقي تبادلي و تجميعي .

p	q	pأوq
1	1	1
1	0	1
0	1	1

د-استلزام عبارتين: Implication de deux propositions

تعريف

- استلزام عبارتين p و q هو عبارة تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارة p صحيحة و q خاطئة .
- يرمز لها بالرمز$(p \Rightarrow q)$ و تقرأ: (p تستلزم q) أو (إذا كانت p فإن q) أو أيضا (p شرط كاف لكي تكون q).

ملاحظات

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- جدول حقيقة العبارة $p \Rightarrow q$ هو:
- الاستلزام $q \Rightarrow p$ يسمى الاستلزام العكسي ل $p \Rightarrow q$
- الصحيح لا يستلزم الخطأ.
- الاستلزام عملية متعدية.
- عمليا للبرهان على أن الاستلزام $(p \Rightarrow q)$ صحيح، نفترض أن p صحيحة و نبين أن q صحيحة.

ه- تكافؤ عبارتين: Equivalence de deux propositions

تعريف

تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي يرمز لها بالرمز $(p \Leftrightarrow q)$ و تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان صحيحتان معا أو خاطئتان معا. و تقرأ: (p تكافئ q) أو (p إذا و فقط إذا كان q).

ملاحظات

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- جدول حقيقة العبارة $(p \Leftrightarrow q)$ هو:
- التكافؤ المنطقي تبادلي و تجميعي .
- تكون العبارتان p و q متكافئتين إذا كانت لهما نفس قيمة حقيقة.
- التكافؤ عملية متعدية.

خاصية

$((p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow q]$.

قوانين موركان: Lois de MORGAN

▪ $\overline{(p \text{ و } q)} \Leftrightarrow (\bar{p}$ أو $\bar{q})$	▪ p و $(q$ أو $r) \Leftrightarrow (p$ و $q)$ أو $(p$ و $r)$
▪ $\overline{p \text{ أو } q} \Leftrightarrow \bar{p}$ و $\bar{q}$	▪ p أو $(q$ و $r) \Leftrightarrow (p$ أو $q)$ و $(p$ أو $r)$.

تمرين

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

تمرين

نعتبر العبارات التالية: p " $\pi = \frac{22}{7}$ " q " $\sqrt{2} + \sqrt{3} \le \sqrt{5}$ " r " $\cos \pi = -1$ ".

حدد قيمة حقيقة العبارات التالية: $p, q, r, (p$ و $q), (p$ أو $q)$

$(p \Rightarrow q), (r \Rightarrow p), (q \Rightarrow r), (p \Leftrightarrow r)$

II)-الدالة العبارية - المكممات

1)-الدالة العبارية : Fonction propositionnelle

تعريف

- نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجوعة E و يصبح عبارة
- كلما عوضنا المتغير بعنصر من E و نرمز عادة لدالة عبارية ب: $A(x)$ أو $B(x)$ أو $A(x,y)$ أو $B(x,y)$ ...

أمثلة

$A(x)$: " $x\in\mathbb{R}, x\leq 2$ " $B(x,y)$: " $(x,y)\in\mathbb{R}^2, 2x-3y=1$ "

2)-المكممات – العبارات المكممة : les quantificateurs-les propositions quantifiées

لتكن $A(x)$ دالة عبارية للمتغير X من مجموعة E.

- العبارة " $\exists x\in E, A(x)$ " تقرأ يوجد على الأقل X من E بحيث $A(x)$. و تكون صحيحة إذا وجد على الأقل عنصر X من المجموعة يحقق الخاصية $A(x)$.
  - الرمز " $\exists$ " يسمى المكمم الوجودي .
- العبارة " $\forall x\in E, A(x)$ " تقرأ لكل x من E لدينا $A(x)$ " و تكون صحيحة إذا كانت جميع عناصر المجموعة E تحقق الخاصية $A(x)$.

الرمز " $\forall$ " يسمى المكمم الكوني

ملاحظة

العبارة " $\exists! x\in E, A(x)$ " تعني أنه يوجد عنصر وحيد X من E يحقق الخاصية $A(x)$.

أمثلة

حدد قيمة كل من العبارات التالية :

" $\exists x\in\mathbb{R}, x^2+1=0$ "   " $\exists x\mathbb{R}, x^2\leq 0$ "   " $\exists! x\in\mathbb{N}, x^2=1$ "

" $\forall x\in\mathbb{R}, \frac{x+1}{2}\geq\sqrt{x}$ "   " $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+1>0$ "   " $\forall x\in\mathbb{N}, \exists y\in\mathbb{N} / x<y$ "

3)- نفي عبارة مكممة

- نفي العبارة " $\forall xE, A(x)$ " هو العبارة " $\exists x\in E, \overline{A(x)}$ ".
- نفي العبارة " $\exists xE, A(x)$ " هو العبارة " $\forall x\in E, \overline{A(x)}$ ".

تمرين

حدد نفي العبارات التالية :

" $\forall n\mathbb{N}, \exists m\in\mathbb{N} / m>n$ "

" $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}, \exists\alpha\in\mathbb{R}^{+*} / 0<|x-1|<\alpha\Rightarrow|x^2-1|<\varepsilon$ "

ملاحظة: ترتيب المكممات

- ترتيب المكممات من نفس الطبيعة ليست له أهمية في تحديد معنى العبارة المكممة.
- ترتيب المكممات من طبيعة مختلفة يؤثر على معنى العبارة المكممة .

مثال

حدد قيمة حقيقة العبارتين:

p : " $\forall x\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R} / 2x+3y-1=0$ " q : " $\exists x\in\mathbb{R} / \forall y\in\mathbb{R}, 2x+3y-1=0$ ".

III)-الاستدلالات الرياضية: les raisonnements mathématiques

تعريف

كل عبارة مكونة من عدة عبارات مرتبطة فيما بينها بالروابط المنطقية بحيث تكون صحيحة كيفما كانت قيمة حقيقة هذه العبارات تسمى قانونا منطقيا. Loi logique

1)-الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس: Raisonnement par implication contraposée.

تعريف

العبارة $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ تسمى الاستلزام المضاد للعكس للاستلزام $(p \Rightarrow q)$.

خاصية

العبارة $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ قانون منطقي ، يسمى قانون الاستلزام بالمضاد للعكس.

أمثلة

1)- بين أن $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow (a = 0)$. حيث $a \in \mathbb{R}$.

2)-بين أن $(n$ زوجي$) \Rightarrow (n^2$ زوجي$)$

3)- بين أن $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (xy \neq 1$ و $x \neq y) \Rightarrow (\frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1})$.

4)- لتكن x, y و z ثلاثة أعداد حقيقية .

بين أن $x + y > 2z \Rightarrow (x > z$ أو $y > z)$.

2)-الاستدلال بالتكافؤ: Raisonnement par équivalence

خاصية

العبارة $[(p \Leftrightarrow q)$ و $(q \Leftrightarrow r] \Rightarrow [p \Leftrightarrow r]$ قانون منطقي و يسمى قانون الاستدلال بالتكافؤ.

أمثلة

1) بين أن $\forall x [1, +\infty[, \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.

2) بين أن $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*}, (\alpha + \beta = 0) \Leftrightarrow (\alpha = 0$ أو $\beta = 0)$.

3) بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, x + \frac{1}{x} \geq 2$

3)-الاستدلال بفصل الحالات: Raisonnement par disjonction de cas

خاصية

العبارة $[(p \Rightarrow q)$ و $(r \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [(p$ أو $r) \Rightarrow q]$ قانون منطقي ، يسمى قانون الاستدلال بفصل الحالات.

أمثلة

1) بين أن $n^2 + n$ زوجي لكل n من $\mathbb{N}$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $|2x - 1| + x = 5$.

4)-الاستدلال بالخلف: Raisonnement par absurde

خاصية

العبارة $[\bar{p} \Rightarrow (q$ و $\bar{q})] \Rightarrow p$ قانون منطقي ، يسمى قانون الخلف.

أمثلة

1) بين أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $n^2 + 1$ ليس مربعا كاملا .

5)-الاستدلال بالترجع: Raisonnement par récurrence

موضوعة الترجع

لتكن $p(n)$ خاصية مرتبطة بعدد طبيعي n. إذا كانت :

- الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل عدد صحيح طبيعي معلوم n_0 .
- العبارة $(p(n) \Rightarrow p(n+1))$ صحيحة من أجل كل عدد صحيح طبيعي n حيث $n \geq n_0$

فإن الخاصية $p(n)$ صحيحة لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq n_0$.

تمارين

1) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \geq 2n+1$.

2) بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) ليكن $a \in \mathbb{R}^{+*}$. بين أن $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$.

تمرين

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $S_n = 2+4+6+...+2n$

1)- أ- أحسب : S_1 و S_2 .

ب- بين بالترجع أن : $S_n = n(n+1)$.

2)- استنتج قيمة المجموع: $S = 2+4+6+......+100$.

تمرين

ليكن q عددا حقيقيا يخالف1.

1)- بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2)- استنتج تبسيطا للمجموع: $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{99}$.