Professeur : Rachid FANIDI

L'année Scolaire :2021-2022

Lycée AL Massira EL Khadraa Tiznit

Les ensembles

Série 02

Niveau : 1BAC SMF

المديرية الإقليمية بتيزنيت
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة سوس ماسة

EXERCICE 01

Déterminer en extension les ensembles suivants :

$$A=\left\{x\in\mathbb{N}/\ \frac{x^2-2x+6}{x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$B=\left\{x\in\mathbb{Z}\ /\ |2x-1|<\frac{3}{2}\right\}$$

$$C=\left\{x\in\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right[\ ;x=\frac{2\pi}{3}+\frac{k\pi}{4};\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

$$D=\{(x;y)\in\mathbb{N}^2/x^2-4y^2=12\}$$

$$E=\left\{n\in\mathbb{Z}\ /\ \frac{18}{n+1}\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$F=\{x\in\mathbb{R}/|1-x|>1\}$$

$$G=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq 3\Longrightarrow x^2=4\}$$

EXERCICE 02

On considère les deux ensembles suivants :

$$A=\left\{n\in\mathbb{N}/\ \frac{n^2-2n+5}{n-1}\in\mathbb{N}\right\}$$

$$B=\left\{x\in\mathbb{Z}/\ \left|\frac{1-x}{2}\right|\leq 1\right\}\ et\ C=B\setminus A$$

1) Déterminer en extension A ; B et C

2) Ecrire en extension : $A\Delta B$; $P(A)$ et $C\times A$.

EXERCICE 03

On considère les deux ensembles suivants :

$$A=\{x\in\mathbb{R}/|3x-4|\geq 2\}$$

$$B=\{x\in\mathbb{R}\ /2x^2-5x-3<0\}$$

1) Déterminer en extension A et B.

2)En déduire que : $A\cap B$; $A\cup B$; $\overline{A}$;$\overline{B}$; $A\setminus B$ et $B\setminus A$

EXERCICE 04

On considère les deux ensembles suivants :

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/|x|<\frac{3}{2}\right\}$$

$$B=\left\{x\in\mathbb{N}/\ \frac{3x-4}{2}\leq 2\right\}$$

1) Déterminer en extension A et B.

2) En déduire que : $A\cap B$;$A\cup B$; $A\setminus B$ et $A\Delta B$

EXERCICE 05

Soit les deux ensembles :

$$A=\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}\ et\ B=\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{3}/k\in\mathbb{Z}\right\}$$

1) Montrer que : $A\subset B$.

2) A-t-on $A=B$? justifier.

EXERCICE 06

On considère l'ensemble suivant :

$$E=\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy}/(x;y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\right\}$$

1) Montrer que : $0\notin E$ et .

2) Montrer que : $\frac{7}{15}\notin E$

3) Montrer que : $E\subset\left]0;1\right]$.

EXERCICE 07

On considère les deux ensembles suivants :

$$E=\left\{\frac{-1}{6}+\frac{K}{3}/K\in\mathbb{Z}\right\}\ et\ F=\left\{\frac{1}{2}+k/K\in\mathbb{Z}\right\}$$

1) Montrer que $F\subset E$.

2) Montrer que : $-\frac{1}{6}\in E$.

3) Montrer que : $-\frac{1}{6}\notin F$.

4) A-t-on $E=F$.

EXERCICE 08

On considère l'ensemble :

$$E=\left\{\frac{x^2-1}{x^2+1}/x\in\mathbb{R}\right\}$$

1) a-Montrer que :

$$\frac{4}{5}\in E\ et\ \frac{-5}{4}\notin F$$

b-Montrer que : $E\subset[-1;1[$

2) a-Montrer que : : $E=[-1;1[$

b- Déterminer $C_{\mathbb{R}}^{E}$ et $E\setminus\overline{\mathbb{Z}}$.

EXERCICE 09

On considère les deux ensembles suivants :

$$A = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y = 1\}$$
$$B = \{(3+2t; 1+t) / t \in \mathbb{R}\}$$

1) Montrer que : $(3;1) \in A \cap B$.

2) Vérifier que : $(4;2) \in B$.

3) Montrer que : $B \subset A$.

4) En déduire $A = B$.

EXERCICE 10

Soit A ;B et C trois parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

1) $A \cap (\overline{A} \cup B)$

2) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

3) $(\overline{A \cup B}) \cap (C \cup \overline{A})$

4) $A \cap \left(B \cap (B \cup \overline{C})\right)$

5) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$

EXERCICE 11

Soit A ;B et C trois parties d'un ensemble E.Montrer que :

1) $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ B \setminus A = C \setminus A \end{cases} \Longrightarrow B = C$

2) $\begin{cases} B \subset A \\ C = A \setminus B \end{cases} \Longrightarrow A = B \cup C$

3) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

4) $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$

5) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

6) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

7) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$

8) $A \subset C \Longrightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

9) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

10) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

EXERCICE 12

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1) a-Montrer que : $A \subset B \Leftrightarrow B \cup \overline{A} = E$

b-En déduire que : $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$

2)Montrer que : $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$

3)Montrer que : $\overline{A} \subset \overline{B} \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup B = A$

4) Montrer que :

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

5) Montrer que : $A = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = B$

6) Montrer que : $A = B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$

7) Montrer que : $A \Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$

8) a- Montrer que : $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.

b- Montrer que : $A \Delta B = A \Delta C \Longrightarrow B = C$

EXERCICE 13

Soit A et B deux ensembles non vides.

1)Montrer que : $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \subset P(B)$

2) Montrer que : $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

3) a-Montrer que : $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

b-A-t-on : $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

4) Montrer que : $P(A \setminus C) \cap P(C \setminus B) = \{\emptyset\}$

EXERCICE 14

On considère les deux ensembles suivants :

$$A = \left\{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{2k\sqrt{2}}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\} \ et\ B = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2k\sqrt{2}}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

1) Est-ce que $2\sqrt{2} \in A$?Justifier la réponse.

2)Montrer que : $A \cap B = \emptyset$.

EXERCICE 15

On considère les deux ensembles suivants :

$$E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq y\} \ et\ F = \{(2t; t^2+1) / t \in \mathbb{R}\}$$

1) Montrer que : $(0;0) \notin F$

2) Montrer que $F \subset E$

3) A-t-on que : $E = F$?

EXERCICE 16

On considère les deux ensembles suivants :

$$E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 - 2y^2 + xy + x + 2y = 0\}$$
$$F = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0\}$$

1) Montrer que : $E \neq \emptyset$ et $F \subset E$.

2) Déterminer un réel y sachant que $(1;y) \in E$. A-t-on $E = F$? Justifier.

3) Déterminer un ensemble G vérifiant $E = F \cup G$.

EXERCICE 17

On considère l'ensemble G défini par :

$$G = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + y^3 < 1 < x + y\}$$

1) Montrer que : $G \subset]0;1[\times]0;1[$

2) A-t-on : $]0;1[\times]0;1[\subset G$? Justifier

EXERCICE 18

On considère les deux ensembles suivants :

$E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $F = [-1;1]$

1) Montrer que : $E^2 \subset F$ et $E \neq F^2$

2) Montrer qu'il n'existe pas deux parties A et B de $\mathbb{R}$ Telles que : $E = A \times B$.