المعادلات و المتراجحات و النظمات

أهداف الدرس

- دعم تقنيات وحل معادلات و متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد.
- التعرف على إشارة $ax+b$ و توظيفها.
- التعرف على الشكل القانوني.
- حل معادلات من الدرجة الثانية: ملاحظة حل بديهي أو التعميل أو الشكل القانوني أو المميز
- حل معادلات تؤول في حلها لإلى معادلات من الدرجة الثانية
- تحديد إشارة ax^2+bx+c و توظيفها لحل متراجحات
- التعرف على نظمات متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين و توظيفها في البرمجة الخطية
- تثبيت و دعم تقنيات حل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى

القدرات المنتظرة

- حل معادلات و متراجحات تؤول في حلها إلى معادلات أو متراجحات من الدرجة الأولى أو الثانية بمجهول واحد.
- حل نظمات من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال مختلف الطرق: التأليفة الخطية ، التعويض و المحددة.
- ترييض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة باستعمال تعابير أو معادلات أو متراجحات أو نظمات
- التمثيل المبياني لحلول متراجحات أو نظمات متراجحات من الدرجة الأولى .

فقرات الدرس

- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد
- المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد
- تعميل و إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c
- نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين
- المتراجحات و التوجيه

I)- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير)

1)-تعريف

ليكن $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$.
كل معادلة تكتب على الشكل $ax+b=0$ ، تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .

أمثلة

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1)- $(E_1): 3x-1=2-\sqrt{2}x$

2)- $(E_2): 3(x-1)-x=2x-3$.

3)- $(E_3): 2x-1=2(x+3)$

4)- $(E_4): mx+3=x-1$ (ناقش حسب قيم m)

2)- معادلات تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

أ- معادلات من النوع : $(ax+b)(cx+b)=0$

مثال

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $(2x-1)(-3x+4)=0$

ملاحظة

$(ax+b)(cx+b)=0$ يكافئ $(ax+b)=0$ أو $(cx+b)=0$

ب- معادلات من النوع: $\frac{ax+b}{cx+d}=0$

مثال

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\frac{2x+3}{3x-1}=0$

ملاحظة

تكون المعادلة $\frac{ax+b}{cx+d}=0$ معرفة إذا كان $x \neq -\frac{d}{c}$.

ج- معادلات تحتوي على القيمة المطلقة

مثال

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $(E_1): |5x+1|=0$

2) $(E_2)|3x-5|=2$

3) $(E_3): |1-2x|=-3$

4) $(E_4): |1-2x|=|3x+4|$

د- معادلات تحتوي على بارامتر حقيقي

مثال

حل و ناقش حسب قيم البارامتر الحقيقي m المعادلة: $(E): mx+1=x-1$.

II)- المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد (تذكير)

تعريف

ليكن $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$.
كل متفاوتة تكتب على الشكل $(ax+b>0)$ أو $(ax+b\geq 0)$ أو $(ax+b<0)$ أو $(ax+b\leq 0)$،
تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

أمثلة

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1)- $(I_1): 3x-1\geq 0$

2)- $(I_2): -3x+2<0$

3) $(I_1): 2x-1\leq 0$

4) $(I_1): 4x-1>2-x$

إشارة الحدانية $ax+b$

لندرس إشارة الحدانية $ax+b$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$.

لدينا : $ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$ و منه $ax+b=0$ يكافئ $x=-\frac{b}{a}$ ، لأن $a\neq 0$.

إذن $x+\frac{b}{a}>0$ يكافئ $x\in\left]-\frac{b}{a},+\infty\right[$ و $x+\frac{b}{a}<0$ يكافئ $x\in\left]-\infty,-\frac{b}{a}\right[$

و حسب إشارة العدد a نحصل على جدول إشارة $ax+b$ كما يلي :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

ملاحظة

- العدد $-\frac{b}{a}$ يسمى جذر الحدانية $ax+b$.
- الحدانية $ax+b$ تأخذ إشارة a على يمين الجذر و عكس إشارة a على يسار الجذر.

أمثلة

- حدد إشارة الحدانية $3x+5$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج مجموعة حلول المتراجحة $3x+5>0$.
- حدد إشارة الحدانية $-2x+1$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج مجموعة حلول المتراجحة $-2x+1\leq 0$.

تمرين

حدد جدول إشارة كل تعبير من التعابير التالية:

$p(x)=(1-x)(2x+3)$ و $q(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ و $R(x)=(x+1)^2(x^2+1)(1-2x)$

III)- المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

1)-تعريف

لتكن a و b و c أعداد حقيقية بحيث $a\neq 0$
كل معادلة تكتب على الشكل $ax^2+bx+c=0$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال

- المعادلة $x^2-x-2=0$ هي معادلة من الدرجة الثانية لمجهول واحد.
- العدد 2 يحقق هذه المعادلة. نقول إن العدد 2 حل للمعادلة أو جذر للحدودية x^2-x-2.

2)-الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c

نشاط

نعتبر ثلاثية الحدود $p(x)=ax^2+bx+c$ ، حيث $a\neq 0$.

- تحقق من أن : $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$.

❖ استنتج أن : $p(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ ، لكل x من $\mathbb{R}$.

خاصية

لتكن a و b و c أعدادا حقيقية بحيث $a\neq 0$

لدينا: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ ، لكل x من $\mathbb{R}$.

الكتابة $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ تسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود ax^2+bx+c .

مثال

نعتبر الحدودية $p(x)=2x^2+5x+2$.

حدد الشكل القانوني للحدودية $p(x)$.

3)- حل المعادلة: $ax^2+bx+c=0$

أ)-تعريف

لتكن ثلاثية الحدود $p(x)=ax^2+bx+c$.

العدد الحقيقي b^2-4ac يسمى مميز ثلاثية الحدود أو مميز المعادلة $ax^2+bx+c=0$ ، و يرمز له ب Δ

مثال

أحسب مميز المعادلة التالية: $x^2-6x+8=0$

ب- تحديد مجموعة حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$

نعتبر المعادلة $(E): ax^2+bx+c=0$

لدينا: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$

➢ إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة (E) ليس لها حلا في $\mathbb{R}$ أي $S=\varnothing$.

إذا كان $\Delta=0$ فإن المعادلة (E) تصبح: $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ و بما أن $a\neq 0$ فإن $x=-\frac{b}{2a}$.

➢ إذا كان $\Delta>0$ فإن المعادلة (E) تصبح: $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{(2a)^2}\right]=0$

أي $\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

و بالتالي المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

خاصية

نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ وليكن Δ مميزها.

➢ إذا كان $\Delta<0$ فإن المعادلة (E) ليس لها حلا في $\mathbb{R}$

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $-\dfrac{b}{2a}$
- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما: $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

أمثلة

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1)- $3x^2 + x + 2 = 0$ 2)- $x^2 - 10x + 25 = 0$ 3)- $x^2 - 3x + 2 = 0$

ملاحظة

في حالة $b = 2b'$ فإننا نضع $\Delta' = b'^2 - ac$ و يسمى المميز المختصر للمعادلة.

و إذا كان $\Delta' \geq 0$ فإن : $x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$ و $x_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$.

مثال

حل في $\mathbb{R}$ باستعمال طريقة المميز المختصر المعادلة: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

3)- مجموع و جداء حلي المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$

نشاط

نعتبر المعادلة $(E): ax^2 + bx + c = 0$ حيث $(a \neq 0)$ و (E) تقبل حلين x_1 و x_2.

- بين أن $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ و $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

خاصية

إذا كان للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، $(a \neq 0)$ حلان x_1 و x_2 فإن: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ و $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

مثال

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E): x^2 - x - 2 = 0$.

- تحقق من أن العدد 2 حل للمعادلة (E) ثم استنتج الحل الثاني للمعادلة (E).

تمرين

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E): x^2 + \left(2\sqrt{3} - 1\right)x - 2\sqrt{3} = 0$.

1)- بين أن المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين دون حسابهما.

2)- تحقق من أن العدد 1 حل للمعادلة (E).

3)- استنتج الحل الثاني للمعادلة (E) ثم عمل الحدودية $x^2 + \left(2\sqrt{3} - 1\right)x - 2\sqrt{3}$.

IV)- تعميل و إشارة الحدودية $ax^2 + bx + c$

1)- تعميل الحدودية: $ax^2 + bx + c$

انطلاقا من حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، لدينا:

خاصية

نعتبر ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ ، $(a \neq 0)$ و ليكن Δ مميزها.

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين هما: x_1 و x_2 و لدينا:

$$ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- إذا كان $\Delta=0$ فإن $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.
- إذا كان $\Delta<0$ فإن الحدودية ax^2+bx+c لا تقبل تعميلا في $\mathbb{R}$.

مثال

عمل في $\mathbb{R}$ الحدودية $6x^2-x-1$.

2)- إشارة ثلاثية الحدود ax^2+bx+c

خاصية

نعتبر ثلاثية الحدود $p(x)=ax^2+bx+c$، $(a\neq 0)$ و ليكن Δ مميزها.

- إذا كان $\Delta<0$ فإن الحدودية $p(x)$ تأخذ إشارة ثابتة على $\mathbb{R}$ هي إشارة a.
- إذا كان $\Delta<0$ فإن $p(x)$ تأخذ إشارة ثابتة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ هي إشارة a و $p\left(-\frac{b}{2a}\right)=0$.
- إذا كان $\Delta<0$ و x_1 و x_2 هما جذري $p(x)$ فإن $p(x)$ تأخذ إشارة a خارج الجذرين و تأخذ عكس إشارة a داخل الجذرين و $p(x_1)=p(x_2)=0$.

مثال

حدد إشارة الحدودية x^2+3x+2 و استنتج حل المتراجحة $x^2+3x+2<0$.

ملاحظة

لحل متراجحة من الدرجة الثانية بمجهول واحد، نعتمد على جدول إشارة ثلاثية الحدود المرتبطة بها.

تمرين

نعتبر في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $(I):\ \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}\geq 0$

1)- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين : $x^2-5x+6=0$ و $x^2-4=0$.

2)- استنتج مجموعة حلول المتراجحة (I)

تمرين

نعتبر الحدوديتين $P\ \ x$ و $Q(x)$ بحيث: $P(x)=x^2-x+1$ و $Q(x)=x^2-x-1$.

1)- أ- حدد α و β جذري الحدودية $Q(x)$. (α هو الجذر الموجب).

ب- حدد جدول إشارة الحدودية $P(x)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $P(x)>0$.

2)- نعتبر الحدودية $R(x)$ حيث: $R(x)=x^4-2x^3+x^2-1$.

أ- تحقق من أن: $R(x)=\left[x(x-1)\right]^2-1$، لكل x من $\mathbb{R}$.

ب- استنتج في $\mathbb{R}$ حلول المعادلة $R(x)=0$.

3)- أثبت المتساويات التالية:(تذكر أن $\alpha^2-\alpha-1=0$).

أ- $\alpha-1=\frac{1}{\alpha}$ ب- $\alpha^5=5\alpha+3$ ج- $2-\alpha=\frac{1}{\alpha^2}$.

(العدد α يسمى العدد الذهبي).

تمرين

نعتبر الحدودية $p(x)$ حيث : $p(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

1)- تحقق من أن $p(x)$ تقبل القسمة على $(x-1)$.
2)- أ- حدد العددين a و b بحيث : $p(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$.
ب- استنتج كتابة $p(x)$ على شكل جداء حدانيات من الدرجة الأولى.
3)- أ- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $(1): p(x)\geq 0$
ب- استنتج حلول المتراجحة $(2): 6-2x\geq\sqrt{x}(5-x)$

V)- معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

تعريف و خاصية

- كل معادلة تكتب على الشكل $(1): ax+by+c=0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين.
- يكون الزوج (x_0,y_0) حلا للمعادلة (1) إذا و فقط إذا كان $ax_0+by_0+c=0$.
- حل المعادلة (1) يعني تحديد جميع الأزواج (α,β) التي تحقق $a\alpha+b\beta+c=0$.
- إذا كان $a\neq 0$ أو $b\neq 0$ فإن المعادلة (1) تقبل ما لا نهاية من الحلول.

مثال

الزوج $(1,-1)$ حل للمعادلة $2x-y-3=0$ ، لأن $2\times 1-(-1)-3=0$.

تمرين

1) – حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $3x-2y+1=0$.
2) – حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة : $mx+(m-2)y+1=0$. (ناقش حسب قيم البارامتر الحقيقي m).

VI)- نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تعريف

لتكن a و b و a' و b' أعدادا حقيقية .
كل نظمة تكتب على الشكل : $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ تسمى نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

حل النظمة $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ في $\mathbb{R}^2$.

نشاط

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ النظمة $(S):\begin{cases}ax+by=c & (1)\\a'x+b'y=c' & (2)\end{cases}$.

1)- بين أن النظمة (S) تصبح : $\begin{cases}(ab'-a'b)x=cb'-bc'\\(ab'-a'b)y=ac'-ca'\end{cases}$.

2)- استنتج أن (S) تقبل حلا و حيدا إذا كان $ab'-a'b\neq 0$.

خاصية و تعريف

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ النظمة $(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

- العدد الحقيقي $D=ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S) و نكتب : $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$.
- إذا كان $D\neq 0$ فإن النظمة (S) تسمى نظمة كرامر وتقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^2$ هو الزوج (x,y) حيث $(x,y)=\left(\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D},\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}\right)$ ، أي $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D}$ و $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$.
- إذا كان $D=0$ فإن النظمة (S) إما لها ما لا نهاية من الحلول و إما ليس لها أي حل.

أمثلة

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية باستعمال طريقة المحددة :

$(S_1):\begin{cases} x+2y=4 \\ -x+4y=2 \end{cases}$ $\qquad$ $(S_2):\begin{cases} x-2y=1 \\ -2x+4y=-2 \end{cases}$

$(S_3):\begin{cases} 3x-4y=2 \\ -x+\dfrac{4}{3}y=\dfrac{-1}{3} \end{cases}$

ملاحظة

إذا كان $D=0$ فإننا نحول النظمة و ذلك بضرب طرفي معادلتيها في عدد حقيقي ، و تكتب على الشكل $\begin{cases} Ax+By=C \\ A'x+B'y=C' \end{cases}$ ثم نقارن العددين C و C' .

- إذا كان $C\neq C'$ فإن النظمة لا تقبل أي حل .
- إذا كان $C=C'$ فإن النظمة تقبل ما لا نهائية من الحلول.

VI) المتراجحات و التوجيه

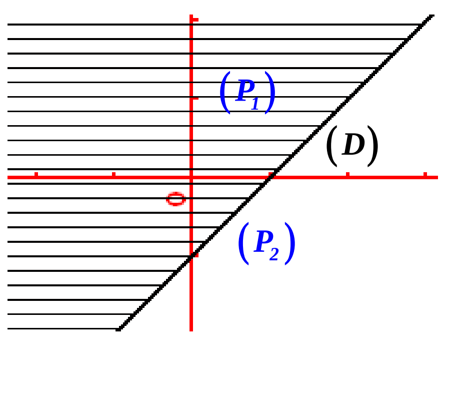
إشارة $ax+by+c$

خاصية

نعتبر في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (D) الذي معادلته $(D): ax+by+c=0$.

المستقيم (D) يحدد نصفي مستوى مفتوحين:

- أحدهما هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق: $ax+by+c>0$.
- و الآخر هو مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق: $ax+by+c<0$.



مثال1

مثل مبيانيا مجموعة حلول المتراجحة $2x-y+1<0$.

مثال2

لنحل مبيانيا النظمة : $\begin{cases} y \le 2 \\ 3x + y \ge 0 \\ x - y \le -1 \end{cases}$ باستعمال **Geoplan**

مجموعة الحلول هي مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تنتمي إلى الجزء الملون بالأزرق و الأحمر و الأخضر معا.