دراسة الدوال العددية

القدرات المنتظرة

- تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراته أو انطلاقا من تمثيلها المبياني.
- حل مبيانيا معادلات من الشكل $f(x)=g(x)$ و متراجحات من الشكل $f(x)\leq g(x)$
- تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة دالتها المشتقة.
- تحديد رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال و تمثيلها مبيانيا
- دراسة و تمثيل دوال جذرية و لا جذرية و مثلثية.

فقرات الدرس

- الفروع اللانهائية لمنحنى دالة عددية (تذكير)
  - المقاربات
  - الفروع الشلجمية
- تقعر منحنى – نقط انعطاف
- محور تماثل – مركز تماثل منحنى دالة عددية.
- أمثلة من دراسة دالة عددية.

I)-الفروع اللانهائية لمنحنى دالة عددية (تذكير)

$\lim_{x\to a^{\pm}} f(x)=\pm\infty$	المستقيم ذو المعادلة $x=a$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f).		
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$	المستقيم ذو المعادلة $y=a$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$		
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=a$	المستقيم ذو المعادلة $y=a$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$		
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ مع $(a\neq 0)$	$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$	المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
		$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$	(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$
	$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$	المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$	
	$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$	المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$	
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$	$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ مع $(a\neq 0)$	$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b$	المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $-\infty$
		$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$	(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $-\infty$
	$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$	المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$	
	$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$	المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$	

II)-الدالة الدورية

تعريف

لتكن f دالة عددية و D مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث:

$$\begin{cases}\forall x\in D, x+T\in D, x-T\in D\\ \forall x\in D, f(x+T)=f(x)\end{cases}$$

- العدد T يسمى دورا (une période) للدالة f.
- أصغر دور موجب قطعا ل f يسمى دور الدالة f.(la période)

أمثلة

- الدالتان $x\mapsto\cos\omega x$ و $x\mapsto\sin\omega x$ دالتان دوريتان دورهما $T=\frac{2\pi}{\omega}$.
- الدالة $x\mapsto\tan x$ دالة دورية دورها $T=\pi$.

خاصية

- إذا كان T دورا لدالة عددية f فإن $\forall n\in\mathbb{Z}, \forall x\in I, f(x+nT)=f(x)$

ملاحظة

إذا كانت f دالة دورية دورها T و D مجموعة تعريفها و $x_0 \in D$ فإنه:

- يكفي دراسة تغيرات f على كل مجموعة من النوع: $D_k = D \cap [x_0 + kT, x_0 + (k+1)T[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ،
وفي الغالب نأخذ المجموعة $D \cap [0, T[$ أو المجموعة $D \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$.
- يستنتج منحنى f على D_k من منحنى f على D_0 بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(kT, 0)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

أمثلة

- مثل مبيانيا الدالة $f : x \mapsto Arc\tan(\tan x)$.
- مثل مبيانيا الدالة $f : x \mapsto x - E(x)$

تمرين: دراسة دالة مثلثية

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos 4x}$،
و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1) - حدد D_f ، مجموعة تعريف الدالة f.

2) – أ- بين أن $\forall x \in D_f, f(x) = \frac{1}{4 \sin 2x}$.
ب- بين أن f دالة دورية دورها π .
ج- بين أن f فردية ثم استنتج أن مجموعة دراسة الدالة f هي $D_E = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3)- أ- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $D_E = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
ب- أنشئ المنحنى (C_f) على المجموعة $[-\pi, \pi] \cap D_f$

II)- تقعر منحنى – نقط انعطاف

خاصية1

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I ، و $x_0 \in I$.

- إذا كانت f'' موجبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب الموجبة.
- إذا كانت f'' سالبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب السالبة.
- إذا انعدمت f'' في x_0 و تغيرت إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف (C_f).

خاصية2

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I ، و $x_0 \in I$.
إذا انعدمت f' في x_0 و لم تتغير إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف (C_f).

III)- عناصر تماثل منحنى دالة عددية

خاصيات

لتكن f دالة عددية معرفة على D_f و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم و $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

- المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تماثل المنحنى (C_f) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\forall x\in D_f,(2a-x)\in D_f\\ \forall x\in D_f,f(2a-x)=f(x)\end{cases}$.
- النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\forall x\in D_f,(2a-x)\in D_f\\ \forall x\in D_f,f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$.

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\begin{cases}x\sqrt[3]{2-x},x\le 2\\ (4-x)\sqrt[3]{x-2},x>2\end{cases}$

و ليكن (C_f) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

- لنبين أن المستقيم الذي معادلته $x=2$ محور تماثل للمنحنى (C_f).

لدينا: $D_f=]-\infty,+\infty[$ إذن لكل x من D_f ، $(4-x)\in D_f$.

و لكل x من D_f:

- إذا كان $x>2$ فإن $(4-x)<2$ و لدينا $f(4-x)=(4-x)\sqrt[3]{2-(4-x)}=(4-x)\sqrt[3]{x-2}=f(x)$
- إذا كان $x<2$ فإن $(4-x)>2$ و لدينا $f(4-x)=(4-(4-x))=x\sqrt[3]{2-x}=f(x)$
- إذا كان $x=2$ فإن أيضا $f(4-x)=f(x)$

إذن المستقيم الذي معادلته $x=2$ محور تماثل للمنحنى (C_f).

IV)- أمثلة من دراسة دالة عددية

مثال4: دالة تحتوي على الجذر من الرتبة n.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[\frac{-1}{3},+\infty\right[$ بما يلي : $f(x)=-x+\left(\sqrt[3]{1+3x}\right)^2$.

1)- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2)- أ – ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $-\frac{1}{3}$ على اليمين ثم أول النتيجة هندسيا .

ب- بين أن $\forall x\in\left]-\frac{1}{3},+\infty\right[, f'\ x = \frac{7-3x}{\sqrt[3]{1+3x}\ \ 4+2\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[3]{1+3x}^{\,2}}$.

ج – أدرس إشارة $f'\ x$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

3) – بين أن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=-x$

4) – نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x)=f(x)-x$

أ – بين أن الدالة g تناقصية قطعا على المجال $[0,2]$.

ب – استنتج أن المعادلة $f\ x = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,2]$.

ج- بين أن العدد α يحقق $8\alpha^3-\alpha^2-6\alpha-1=0$.

5) – أرسم منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

مثال5: دالة تحتوي على $Arc\tan$

I)- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty,0[$ بما يلي : $g(x)=Arc\tan\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$.

أدرس تغيرات الدالة g ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II)- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}-x, x\geq 0 \\ f(x)=xArc\tan\frac{1}{x}, x<0 \end{cases}$.

1)- أ- ادرس اتصال الدالة f في الصفر.

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في الصفر ثم أعط تأويلا هندسيا لهاتين النتيجتين.

2)- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

3)- أ- بين أن: $\forall x>0, f'(x)=\frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(1+3\sqrt[3]{x}\right)}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$ و $\forall x<0, f'(x)=g(x)$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f .

4)- أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,+\infty[$ و بين أن α تحقق: $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$ ثم استنتج قيمة α.

ب- أنشئ (C_f) منحنى الدالة f . (الوحدة $2cm$).

5)- بين أنه لكل عددين حقيقيين a و b بحيث $0<a<\alpha<b$ ،فإن: $\frac{a}{b}>\frac{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$.

مثال5: دالة تحتوي على $Arc\tan$

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=2Arc\tan\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

1)-أ- أحسب : $f(0)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أن $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة.

2)- أدرس تغيرات الدالة f

3)- أنشئ (C_f) منحنى الدالة f . (الوحدة $2cm$).

4)- لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=[1,+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J ن و مثل منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5)- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,2]$.

6)- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=1$ و $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- تحقق من أن $f(2)\geq\frac{\pi}{3}$.

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}, 1\leq u_n\leq 2$

ج- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن $\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}|u_n-\alpha|$ ،استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التنقيط

يؤخذ بعين الاعتبار طريقة تنظيم ورقة التحرير و الدقة في الأجوبة.

❖ مسألة

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$f(x)=x\sqrt[3]{4-x}$ ، و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I)- الجزء الأول: (7.5ن)

(1.5ن) 1)- أ- تحقق من أن: $D_f=]-\infty,4]$ ثم أحسب $f(4)$ و $f(-4)$.

(1ن) ب- أحسب النهايتين : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$.

(1.5ن) 2)- أدرس قابلية اشتقاق f في 4 على اليسار ثم أول هذه النتيجة هندسيا .

(1.5ن) 3)- أ- بين أن: $f'(x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3-x}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ لكل x من المجال $]-\infty,4[$.

(1ن) ب- استنتج رتابة الدالة f على كل من المجالين $[3,4]$ و $]-\infty,3]$.

(1ن) 4)- استنتج أن: $\forall a\in]-\infty,4],a^4-4a^3+27\geq 0$.

II)- الجزء الثاني: (8.5ن)

(1ن) 1)- حدد التقريب التآلفي للعدد $f(-4+h)$ بجوار الصفر.

(1ن) 2)- استنتج قيمة مقربة للعدد $f(-3.997)$.

(1ن) 3)- أ- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

(1.5ن) ب- أنشئ منحنى الدالة f في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(1.5ن) 4)- أ- بين أن: $\forall x\in]-\infty,4],f(x)=4\sqrt[3]{4-x}-\sqrt[3]{(4-x)^4}$.

(1.5ن) ب- تحقق من أن f تقبل دوال أصلية على المجال $]-\infty,4[$ ثم حددها.

(1ن) ج- استنتج الدالة الأصلية G للدالة f على $]-\infty,4[$ التي تحقق $G(3)=0$.

III)- الجزء الثالث: (4ن)

لتكن الدالة g قصور الدالة f على المجال $I=]-\infty,3]$.

(1ن) 1)- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يجب تحديده.

(1ن) 2)- أنشئ منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم السابق $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(1.5ن) 3)-أ- بين أن الدالة g^{-1} قابلة للاشتقاق في -8،ثم أحسب $(g^{-1})'(-8)$.

(0.5ن) ب- حدد معادلة المماس لمنحنى g^{-1} عند النقطة التي أفصولها -8 .

مثال5: دالة تحتوي على $Arc\tan$

I)- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty,0[$ بما يلي: $g(x)=Arc\tan\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$.

أدرس تغيرات الدالة g ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II)- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}-x, x\geq 0 \\ f(x)=xArc\tan\frac{1}{x}, x<0 \end{cases}$

1)- أ- ادرس اتصال الدالة f في الصفر.

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في الصفر ثم أعط تأويلا هندسيا لهاتين النتيجتين.

2)- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

3)- أ- بين أن: $\forall x>0, f'(x)=\frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(1+3\sqrt[3]{x}\right)}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$ و $\forall x<0, f'(x)=g(x)$.

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f.

4)- أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,+\infty[$ و بين أن α تحقق: $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$ ثم استنتج قيمة α.

ب- أنشئ (C_f) منحنى الدالة f. (الوحدة $2cm$).

5)- بين أنه لكل عددين حقيقيين a و b بحيث $0<a<\alpha<b$، فإن: $\frac{a}{b}>\frac{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$.