I. الاتصال في نقطة

1. تعريف

f متصلة في x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

2. الاتصال على اليمين-الاتصال على اليسار

f متصلة على اليمين في x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

f متصلة على اليسار في x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

3. خاصية

f متصلة على اليمين وعلى اليسار في x_0 $\Leftrightarrow$ f متصلة في x_0

II. الاتصال على مجال

1. الاتصال على مجال

- تكون f متصلة على مجال مفتوح $]a;b[$ إذا كانت f متصلة في كل عنصر من المجال $]a;b[$
- تكون f متصلة على مجال مغلق $[a;b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a;b[$ و متصلة على اليمين في a وعلى اليسار في b
- نعرف بالمثل اتصال f على كل من المجالات $]a;b]$ و $[a;b[$ و $]a;+\infty[$ و $]-\infty;+\infty[$

2. العمليات على الدوال المتصلة

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

- الدوال $f+g$ و $f\times g$ و kf متصلة على I
- إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتين على I
- إذا كانت f متصلة على I فإن f^n و $|f|$ متصلة على I
- إذا كانت f متصلة وموجبة على I فإن الدالة $x\to\sqrt{f(x)}$ متصلة أيضا على I

3. نتائج

- كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$

- كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها
- الدالة $x \to \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
- الدالتان sin و cos متصلتان على $\mathbb{R}$
- الدالة tan متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\right\}$

4. صورة مجال بدالة متصلة

- صورة مجال I بدالة متصلة f هو مجال و نرمز له ب $f(I)$
- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة

5. صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا

المجال I	f تزايدية قطعا	f تناقصية قطعا
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$[a;+\infty[$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);f(a)\right]$
$]a;+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$
$]-\infty;a]$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);f(a)\right]$	$\left[f(a);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty;a[$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$
$\mathbb{R}$	$\left]\lim\limits_{x\to -\infty} f(x);\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to +\infty} f(x);\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\right[$

III. مبرهنة القيم الوسيطية

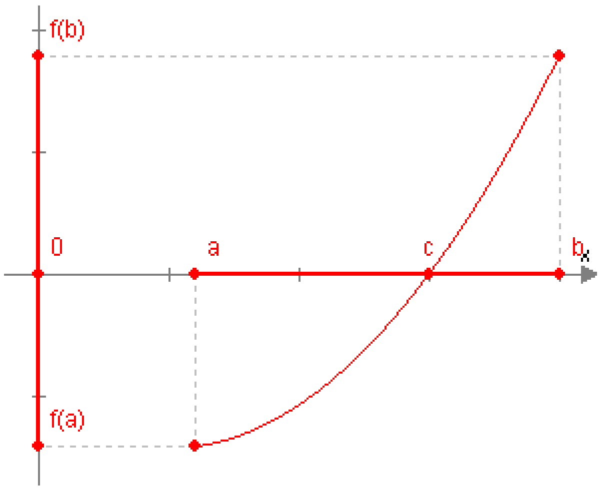
مبرهنة 1

إذا كانت f متصلة على المجال $[a;b]$

وكان $f(a)\times f(b)<0$

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a;b[$

مبرهنة 2



إذا كانت f متصلة على المجال $[a;b]$

وكانت f رتيبة قطعا على المجال $[a;b]$

وكان $f(a)\times f(b)<0$

فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a;b[$

ملاحظة

العبارات التالية متكافئة

- المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a;b[$
- (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها α حيث $a<\alpha<b$
- يوجد على الأقل α في المجال $]a;b[$ بحيث $f(\alpha)=0$

للإجابة على إحدى هذه العبارات نستعمل مبرهنة القيم الوسيطية

I. تعاريف و خاصيات

1. خاصية

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية معرفة من المجال $f(I)$ نحو المجال I ويرمز لها ب f^{-1}

2. نتائج

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in f(I) \end{cases}$$

$$\forall x \in I \quad (f^{-1}of)(x) = x$$

$$\forall y \in f(I) \quad (fof^{-1})(y) = y$$

3. ملاحظة

لتحديد الدالة العكسية نستعين بالتكافئ التالي

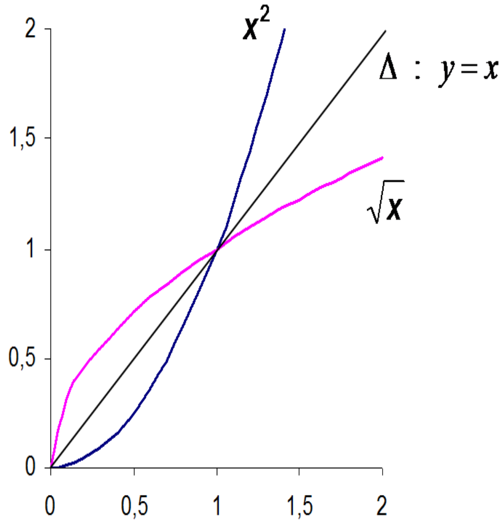
$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

4. خاصية

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

فإن

- f^{-1} متصلة على $f(I)$
- f و f^{-1} لهما نفس التغيرات
- (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم أي المستقيم ذو المعادلة $y = x$



II. اشتقاق الدالة العكسية

1. خاصية

إذا كانت f قابلة الإشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$

فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة الإشتقاق في $y_0 = f(x_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2. خاصية

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال I

إذا كانت f قابلة لإشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة f' لا تنعدم على المجال I

فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة الإشتقاق على المجال $f(I)$

ولدينا

$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

المنحنى (C_f)	المنحنى $(C_{f^{-1}})$
(C_f) يقبل مقارب عمودي معادلته $x = a$	$(C_{f^{-1}})$ يقبل مقارب أفقي معادلته $y = a$
(C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y = b$	$(C_{f^{-1}})$ يقبل مقارب عمودي معادلته $x = b$
(C_f) يقبل مقارب مائل معادلته $y = ax + b$	$(C_{f^{-1}})$ يقبل مقارب مائل معادلته $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$
(C_f) يقبل مماس عمودي	$(C_{f^{-1}})$ يقبل مماس أفقي
(C_f) يقبل مماس أفقي	$(C_{f^{-1}})$ يقبل مماس عمودي
(C_f) يقبل نصف مماس عمودي	$(C_{f^{-1}})$ يقبل نصف مماس أفقي
(C_f) يقبل نصف مماس أفقي	$(C_{f^{-1}})$ يقبل نصف مماس عمودي

1. تعريف

الدالة $x \to x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ إذن فهي تقبل دالة عكسية معرفة على $\mathbb{R}^+$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n ونرمز لها ب $\sqrt[n]{\ }$

2. خاصيات

دالة الجذر من الرتبة n متصلة على $\mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^n = y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

$$\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x > y$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

3. ملاحظات

$\sqrt[1]{x} = x$ و $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x}$ يسمى جذر مكعب ل x

4. عمليات على الجذور من الرتبة

ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$ ولكل n و m من $\mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} \qquad y \neq 0 \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad \sqrt[n]{x} = \sqrt[nm]{x^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} \qquad \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m} \qquad \sqrt[n]{0} = 0$$

$$\sqrt[n]{1} = 1 \qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{x^P} = x^{\frac{p}{n}}$$

$$x > 0 \ , \ \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$