

Exercice 1 : 7 pts

1) Exprimer les propositions suivantes en utilisant les connecteurs logiques et les quantificateurs :

a) l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution réelle supérieure à $\frac{3}{2}$.

b) pour qu'un nombre réel x soit supérieur à 1 il suffit que son cube soit supérieur à 2.

c) on peut trouver un nombre rationnel compris entre $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$.

2) soit P la proposition : " $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x^2 - xy + y^2 = 0$ "

a) Déterminer \bar{P} la négation de la proposition P .

b) En déduire que la proposition P est fautive.

3) montrer en utilisant un raisonnement par contraposée que :

" $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (xy + x + y < 0) \Rightarrow (x > -2 \text{ ou } y > -2)$ "

Exercice 2 : 8 pt

1) soit P la proposition : " $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{-3}{2} \leq x \leq -1 \Rightarrow \frac{3}{4} \leq x^2 + 5x + 6 \leq 2$ "

a) montrer que la proposition P est vraie.

b) déterminer \bar{P} la négation de la proposition P .

2) montrer en utilisant un raisonnement par disjonction des cas que :

$(\forall n \in \mathbb{N}) 4$ divise $n^4 - n^2 + 16$. (on pourra discuter les cas : n pair et impair)

3) montrer en utilisant un raisonnement par équivalences successives que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) (\forall y \in \mathbb{R}^*) \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{y} \Leftrightarrow x = y$$

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R} : \sqrt{1 - 2x} = x + 7$

b) Résoudre dans $\mathbb{R} : \sqrt{1 - 2x} \leq x + 7$

Exercice 3 : 6 pts

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{k=1}^n (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

2) a) montrer que $(\forall x \in [3, +\infty[) 2x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \geq 0$.

(Indication : $2x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = x^3 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$)

b) en déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a $3n^3 \geq (n+1)^3$.

c) montrer par récurrence que : $(\forall n \geq 3) : 3^n \geq n^3$.

3) Soient p et q et r trois propositions.

Montrer par l'absurde que $(p \text{ ou } q) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow q]$ est une loi logique.