Professeur : Rachid FANIDI

L'année Scolaire :2021-2022

Lycée AL Massira EL Khadraa Tiznit

Les applications

Série 03

Niveau : 1BAC SMF

المديرية الإقليمية بتيزنيت
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة سوس ماسة

EXERCICE 01

On considère l'application :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x^2-4x+5$$

1) a-Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(2-x)=f(2+x)$.

b-L'application f est-elle injective ? Justifier.

2) a-Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;f(x)\geq 1$.

b- L'application f est-elle surjective ? Justifier.

3)Montrer que l'application f est une bijection de $[2;+\infty[$ vers $[1;+\infty[$ dont on déterminera sa bijection réciproque f^{-1}.

EXERCICE 02

On considère l'application :

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$$
$$x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

1) a-Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(-1-x)=f(x)$.

b- L'application f est-elle injective ? Justifier.

2)a-Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

b-En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3) Montrer que :

$$f(\mathbb{R})=\left]0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]\ et\ f^{-1}([1;2])=\left[\frac{1}{2};1\right]$$

f est-elle surjective ?

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$.

a-Montrer que g est bijective de $I=\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$ sur l'intervalle $J=\left]0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

b-Déterminer l'application g^{-1}.

EXERCICE 03

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$$

1)a-Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b- L'application f est-elle surjective ? Justifier.

2)a-Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(1-x)=f(x)$.

b- L'application f est-elle injective ? Justifier.

3) Soit g et h les restrictions de f aux intervalles $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $J=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ respectivement.

a-Montrer que l'application g est bijective de $I=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ sur l'intervalle $K=\left]\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$.

b- On considère l'application :

$$u:J\to I$$
$$x\mapsto 1-x$$

Vérifier que : $h=gou$ et en déduire que h est une bijection puis déterminer h^{-1}.

EXERCICE 04

On considère l'application :

$$f:[0;+\infty[\to[0;+\infty[$$
$$x\mapsto x+\frac{4}{x}$$

1)Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f\left(\frac{4}{x}\right)=f(x)$. f est-elle injective ?

2)Montrer que : $f(]0;+\infty[)\subset]4;+\infty[$. f est-elle surjective ?

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

a-Montrer que :

$$(\forall y\in]4;+\infty[);\ y-4-\sqrt{y^2-16}<0$$

b- Montrer que g est bijective de $[2;+\infty[$ sur $[4;+\infty[$.

c- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de $[4;+\infty[$.

EXERCICE 05

On considère l'application :

$$f:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

1)a-Montrer que :

$$(\forall x\in[0;+\infty[):f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$$

b- L'application f est-elle injective ? Justifier.

2)Déterminer :

$$f^{-1}\left(\left[0;\frac{2}{5}\right]\right)$$

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;1]$.

a- Montrer que l'application g est bijective de $[0;1]$ sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

b- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

EXERCICE 06

On considère l'application :

$$f:]1;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto\frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

1)a-Montrer que pour tout $x\in]1;+\infty[$: $\frac{x}{x-1}\succ 1$

b-Montrer que pour tout $x\in]1;+\infty[$:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=f(x)$$

c- L'application f est-elle injective ? Justifier

2)a-Montrer que : : $f(]1;+\infty[)\subset[2;+\infty[$.

b-L'application f est-elle surjective ? Justifier

c-Déterminer :

$$f^{-1}\left(\left[\frac{5}{2};+\infty\right[\right)$$

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

a-Montrer que :

$$(\forall y\in]2;+\infty[);y^2-4-\sqrt{y^4-4y^2}<0$$

b- Montrer que g est bijective de $[2;+\infty[$ sur $[2;+\infty[$.

c- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de $[2;+\infty[$.

4)Soit h l'application définie de $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ sur $[2;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

a-Vérifier que :

$$\left(\forall x\in\left]0;\frac{1}{2}\right]\right);h(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$$

b-En déduire que l'application h est une bijection de $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

c- Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout x de $[2;+\infty[$.

EXERCICE 07

On considère l'application :

$$f:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto x-\sqrt{x}$$

1) Montrer que l'application f n'est pas injective.

2)a-Résoudre dans $[0;+\infty[$ l'équation : $f(x)=-1$.

b-L'application f est-elle surjective ? Justifier.

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

a- Montrer que l'application g est bijective de $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$.

b- Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in\left[-\frac{1}{4};+\infty\right[$.

EXERCICE 08

On considère l'application g définie de $]0;+\infty[^2$ dans $]0;+\infty[^2$ par : $g(x;y)=\left(xy;\frac{x}{y}\right)$.

1) Montrer que l'application g est injective et surjective.

2) En déduire que l'application g est bijective et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}

EXERCICE 09

On considère l'application :

$$f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}^*$$
$$(n;m)\mapsto(2n+1)2^m$$

Montrer que l'application f est surjective et injective.

EXERCICE 10

Soit E un ensemble non vide ; A et B deux parties de E Telles que : $A\cap B=\emptyset$ et $A\cup B=E$

On considère l'application :

$$F:P(E)\to P(A)\times P(B)$$
$$X\mapsto(X\cap A;X\cap B)$$

1) Montrer que l'application F est bijective.

2) Déterminer F^{-1} la bijection réciproque de l'application F.