الثانية علوم رياضية أ مادة : الرياضيـــات ***Prof: Rahmouni***	فـــــرض محـــــــروس قم 2 (2018-2017)	أكاديمية فاس - مكناس ثانوية عمر ابن الخطاب التأهيلية - مكناس-

التمرين: 01 **<u>أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.</u>**

$\boxed{\frac{1}{2}}$

1) لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $I=[0;1]$ و قابلة للاشتقاق على $]0.1[$ حيث $f(0)=0$ 2ن

و $f(1)=1$. بين أن : $\exists c\in]0.1[\quad f(c).f^{'}(c)=\frac{1}{2}$

2) لتكن g الدالة العددية المعرفة ب : $f(x)=\sqrt{x\cos x}$

أ-بتطبيق مبرهنة رول بين أن : $\tan\alpha=\frac{1}{\alpha} \quad \exists\alpha\in]0;\alpha[$**.** 1ن

ب- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $\exists\beta\in \left]0.\frac{\pi}{3}\right[\quad f^{'}(\beta)=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$ 1ن

التمرين: 02

نعتبر الدالة f_n المعرفة على المجال $]-\pi;\pi[$ ب $f_n(x)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)+x-n$

1) أدرس تغيرات الدالة $f_n(x)$ على المجال $]-\pi;\pi[$. 1ن

2) بين انه : $\forall n\in\mathbb{N}^{*} \quad \exists x_n\in]0.\pi[\quad f_n(x_n)=0$ 1ن

3) تحقق أن : $f_{n+1}(x_n)=-1$ **ثم حدد رتابة المتتالية (x_n).** 1ن

4) استنتج أن (x_n) متقاربة وبين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\pi$ 1ن

التمرين: 03

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=1+\dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$ **و المتتاليتين** $v_n=u_{2n}$ **و** $w_n=u_{2n+1}$

1) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\succ 1$ 0.5ن

2) بين أن المتتالية (v_n) تزايدية و المتتالية (w_n) تناقصية. 1ن

3) بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad |v_{n+1}-w_{n+1}|\le\frac{1}{4}|v_n-w_n|$ 1ن

4) استنتج أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) متحاديتين 0.5ن

5) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها. 1ن

مسألـــــــة

<u>الجزء الأول :</u> نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0.+\infty[$ ب $g(x)=2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x-1}{x^2+1}$

1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g على المجال $]0.+\infty[$ ثم بين أن : $\forall x\succ 0 \quad g^{'}(x)=\frac{-(x^2+2x+3)}{(x^2+1)^2}$ 1ن

2) ضع جدول تغيرات لدالة g على المجال $]0.+\infty[$ ثم استنتج أن : $\forall x\succ 0 \quad 0\prec g(x)\prec\pi+1$ 0.25ن

<u>الجزء الثاني:</u> نعتبر الدالة f المعرفة على $]0.+\infty[$ ب $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right).....x\succ 0 \\ f(0)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i}:\vec{j})$

1) أدرس اتصال الدالة f على يمين 0. 0.5ن

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0وأول هندسيا النتيجة.(تذكر أن $\forall x\succ 0 \ \arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

3) أ-أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ | 1ن

ب- - بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $x \prec \arctan x \prec \frac{x}{1+x^2}$ $\forall x \succ 0$ | 0.5 ن

ج-استنتج : $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x^2}$ | 0.5ن

د- بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = x-2$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$. | 0.25ن

4) أ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على المجال $]0.+\infty[$ ثم بين أن : $f'(x)=(x-1)g(x)$ $\forall x \succ 0$ | 0.5ن

ب-ضع جدول تغيرات الدالة f على $]0.+\infty[$. | 0.5ن

ج- بين أن : $\left|f'(x)\right| \prec \pi+1$ $\forall x \in]0.1]$ | 0.25ن

5) أنشئ (C_f) منحنى الدالة f . | 0.25ن

<u>الجزء الثالث:</u> نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب $\begin{cases} u_0 \in [0.1] \\ u_{n+1} = \frac{1}{5} f(u_n) \end{cases}$ | 1ن

1) بين أن : $0 \le u_n \le 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) بين أن المعادلة $f(x)=5x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0.1]$. | 0.25ن

3) بين أن : $\left|u_{n+1}-\alpha\right| \le \frac{\pi+1}{5}\left|u_n-5\right|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ | 0.5ن

4) حدد $\lim_{n\to\infty} u_n$ | 0.5ن

<u>تمارين أضافية</u> | 0.25ن

<u>التمرين 01:</u>

نعتبر المتتاليات (a_n) و (b_n) و (c_n) المعرفة بما يلي : $a_0 \succ b_0 \succ c_0 \succ 0$

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n+c_n}{3} \quad \text{و} \quad \frac{1}{c_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}\right) \quad \text{و} \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_nb_nc_n}$$

1) بين أن (a_n) و (c_n) متحاديتان.

2) بين أن : $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$ | 2ن

<u>التمرين 02 :</u>

لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $I=[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a.b[$

بين أن : $\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3} = \frac{f'(c)}{3c^2}$ $\exists c \in]a;b[$ | 2ن

<u>التمرين 03 :</u>

لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ و قابلة للاشتقاق على $\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

حيث $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

بين أن : $\left(1+\cos^2 2c\right) f'(c) = 2\sin 2c$ $\exists c \in \left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ | 2ن