تصحيح الإمتحان الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2010

شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها

مادة :الرياضيات

التمرين الأول:

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(4,0,-3)$ و $\overrightarrow{AC}(8,1,-6)$ إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & -6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4 & 8\\ -3 & -6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4 & 8\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=3\vec{i}+4\vec{k}$$

تحديد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

$$M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1)+4(z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+4z-9=0$$

ومنه $(ABC):\ 3x+4z-9=0$

2) لدينا معادلة الفلكة S هي: $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

إذن

$$M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+z^2-15=0$$

$$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25$$

وبالتالي :الفلكة (S) مركزها $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها $r=5$.

3) أ-المستقيم (Δ) موجه بالمتجهة المنظمية على المستوى (ABC)أي بِـ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ويمر من$\Omega(3,1,0)$

إذن النظمة : $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\end{cases}$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

ب-لنحسب مسافة $\Omega(3,1,0)$ عن المستقيم (Δ) .بما أن $\Omega\in(\Delta)$ فإن $d\left(\Omega;(\Delta)\right)=0<r$ ومنه (Δ) يقطع الفلكة (S) في نقطتين متماثلتين بالنسبة للنقطة Ω .

$$M(x,y,z)(S)\cap(\Delta)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25\\ x=3+3t\\ y=1\\ z=4t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=25\ (1)\\ x-3=3t\\ y-1=0\\ z=4t\end{cases}$$

لدينا
$$(1) \Leftrightarrow 9t^2+16t^2=25$$
$$\Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow t=1 \text{ أو } t=-1$$

وبالتالي $(S)\cap(\Delta)=\{E(6,1,4);F(0,1,-4)\}$.

التمرين الثاني :

1) لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة $z^2-6z+10=0$.

لدينا :

$$z^2-6z+10=0 \Leftrightarrow (z-3)^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow (z-3)^2=i^2$$
$$\Leftrightarrow z-3=i \text{ أو } z-3=-i$$
$$\Leftrightarrow z=3+i \text{ أو } z=3-i$$

وبالتالي $S=\{3+i\ ;\ 3-i\}$

2) أ- التمثيل العقدي للدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه $\mathcal{A}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ هو :

لتكن $\mathcal{M}'(z')$ صورة $\mathcal{M}(z)$ بالدوران $\mathcal{R}$ إذن:

$$z'-a=e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}(z-a) \Leftrightarrow z'-(3-i)=i(z-(3-i))$$
$$\Leftrightarrow z'=iz-3i-1+3-i$$
$$\Leftrightarrow z'=iz+2-4i$$

ب-لتكن c' لحق النقطة C' صورة C بالدوران $\mathcal{R}$ إذن:

$$c'=ic+2-4i$$
$$=i(7-3i)+2-4i$$
$$=5+3i$$

ج-

$$\frac{c'-b}{c-b}=\frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i}=\frac{2+2i}{4-4i}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2i}{2}\right)=\frac{1}{2}i$$

ومنه:

$$\begin{cases} Arg\left(\dfrac{c'-b}{c-b}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\dfrac{c'-b}{c-b}\right|=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'})}\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ \left|\dfrac{c'-b}{c-b}\right|=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'})}\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ |c-b|=2|c'-b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC'})}\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \\ BC=2.BC' \end{cases}$$

وبالتالي : المثلث BCC' قائم الزاوية في B وأن $BC=2BC'$.

التمرين الثالث:

الصندوق يحتوي على 10 كرات ، نسحب تآنيا 4 كرات من الصندوق .

كل عنصر من كون الإمكانيات Ω هو تأليفة لِـــ 4 كرات من بين 10 كرات التي يحتوي عليها الصندوق .

وبالتالي : $card\Omega=C_{10}^{4}=210$.

$1)$ الحدث A : "الحصول على كرة حمراء واحدة فقط"

الحدث A محقق إذا تم اختيار كرة واحدة حمراء من بين 3 كرات حمراء و

3 كرات من بين 7 كرات غير الحمراء الموجودة في الصندوق

إذن : $card\ A=C_{3}^{1}\times C_{7}^{3}=3\times35=105$ وبالتالي $p(A)=\dfrac{card\ A}{card\ \Omega}=\dfrac{105}{210}=\dfrac{1}{2}$.

الحدث B :"الحصول على كرة بيضاء على الأقل"

لدينا الحدث $\overline{B}$:"عدم الحصول على كرة بيضاء"

الحدث $\overline{B}$ محقق إذا تم اختيار 4 كرات من بين 5 كرات غير البيضاء الموجودة في الصندوق .

إذن $card\ \overline{B}=C_{5}^{4}=5$ وبالتالي $p(\overline{B})=\dfrac{card\ \overline{B}}{card\ \Omega}=\dfrac{C_5^4}{C_{10}^4}=\dfrac{5}{210}=\dfrac{1}{42}$

وبالتالي : $p(B)=1-p(\overline{B})=1-\dfrac{1}{42}=\dfrac{41}{42}$.

$2)$ أ-الصندوق يحتوي على 3 كرات حمراء ومنه كل سحبة لِـــ 4 كرات من الصندوق تحتوي على :

ثلاث كرات حمراء أو كرتين حمراوتين أو كرة واحدة حمراء أو لاتحتوي على أية كرة حمراء.

ومنه مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي: 3 أو 2 أو 1 أو 0 .وبالتالي : $X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$.

ب-حساب $p(X=2)$

الحدث $(X=2)$ محقق ، إذا تم اختيار كرتين حمراوتين من بين الكرات الثلاث الحمراء

وكرتين من بين 7 كرات غير الحمراءالموجودة في الصندوق. ومنه $card\ (X=2)=C_3^2\times C_7^2=3\times21=63$

وبالتالي : $p(X=2)=\dfrac{card\ (X=2)}{card\Omega}=\dfrac{63}{210}=\dfrac{3}{10}$

حساب $p(X=0)$

الحدث $(X=0)$ محقق ، إذا تم اختيار 4 كرات من بين 7 كرات غير الحمراء الموجودة في الصندوق.

إذن $card\,(X=0)=C_7^4=35$ وبالتالي: $p(X=0)=\frac{card\,(X=0)}{card\,\Omega}=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$.

ج-لدينا $p(X=1)=p(A)=\frac{1}{2}$.

الحدث $(X=3)$ محقق ، إذا تم اختيار الكرات الحمراء الثلاث وكرة من بين 7 كرات غيرالحمراء الموجودة في الصندوق.

إذن $card\,(X=3)=C_3^3\times C_7^1=7$

وبالتالي : $p(X=3)=\frac{card\,(X=3)}{card\,\Omega}=\frac{7}{210}=\frac{1}{30}$.

قانون احتمال المتغير العشوائي X .

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{3u_n-1}{2u_n}\quad ;\quad (\forall n\in\mathbb{N})$.

1) لنبين بالترجع أن : $u_n-1>0\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

لدينا $u_0=2$ إذن $u_0-1>0$ وبالتالي المتفاوتة $u_n-1>0$ صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $u_n-1>0$ ونبين أن $u_{n+1}-1>0$.

$u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1=\frac{u_n-1}{2u_n}$ بما أن $u_n-1>0$ (إفتراض الترجع) فإن $u_{n+1}-1>0$.

ومنه $u_n-1>0\quad(\forall n\in\mathbb{N})$.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$

أ-لنبين أن (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$.

ليكن n من $\mathbb{N}$.

لدينا : $$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}=\frac{\frac{3u_n-1}{2u_n}-1}{2\frac{3u_n-1}{2u_n}-1}=\frac{\frac{u_n-1}{2u_n}}{\frac{4u_n-2}{2u_n}}=\frac{u_n-1}{4u_n-2}=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n-1}{2u_n-1}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n\quad(\forall n\in\mathbb{N})$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{2u_0-1}=\frac{1}{3}$.

نعلم أنه : $v_n=v_0\times q^n\quad(\forall n\in\mathbb{N})$ إذن $v_n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad(\forall n\in\mathbb{N})$.

ب- ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \Leftrightarrow v_n(2u_n - 1) = u_n - 1 \Leftrightarrow 2u_n v_n - v_n = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n(2v_n - 1) = v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$$

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$

لدينا $0 < \frac{1}{2} < 1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} = 1$.

3) بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ و الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة في $x_0 = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(1) = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

التمرين الخامس:

(I

1) لدينا g دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

ليكن x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x) = \left(1 + 4x e^{2x}\right)' = 4\left(e^{2x} + 2x e^{2x}\right) = 4(2x+1)e^{2x}$

ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$.

2) لدينا إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $2x+1$ ومنه :

على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

على المجال $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ لدينا $g'(x) \leq 0$ ومنه g تناقصية على $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

3) أ- لدينا $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)e^{\left(2\times-\frac{1}{2}\right)} = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$.

بما أن $e > 2$ فإن $\frac{2}{e} < 1$ ومنه $1 - \frac{2}{e} > 0$ وبالتالي $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$.

ب-من تغيرات الدالة g نستنتج أن الدالة g تقبل قيمة دنيا عند $-\frac{1}{2}$ ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}) \ g(x) \geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$

وبالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0$.

(II $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$

1) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x.e^{2x} + x + 1 - e^{2x} = -\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x.e^{2x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty$.

2) لدينا f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x)=2e^{2x}+2e^{2x}(2x-1)+1$$
$$=1+4xe^{2x}=g(x)$$

وبما أن $g(x)>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$ فإن $f'(x)>0 \quad (\forall x\in\mathbb{R})$ ومنه f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3) أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x}.e^{2x}+\dfrac{x+1}{x}=+\infty$.

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$.

نتيجة: $(\mathscr{C}_f)$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب . (الجزء الموجب)

ب-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$

لدينا
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}e.(2x-1)e^{2x-1}=0$$
لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}2x-1=-\infty$.

نتيجة:المستقيم $(\Delta):\ y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

ج-لدينا $f(x)-(x+1)=(2x-1).e^{2x} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$.

وبالتالي وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) مرتبطة بإشارة $2x-1$.

-إذا كان $x=\dfrac{1}{2}$ فإن (Δ) يقطع $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

-إذا كان $x>\dfrac{1}{2}$ فإن $2x-1>0$ ومنه $(\mathscr{C}_f)$ يوجد فوق المستقيم (Δ) .

- إذا كان $x<\dfrac{1}{2}$ فإن $2x-1<0$ ومنه $(\mathscr{C}_f)$ يوجد تحت المستقيم (Δ) .

4)

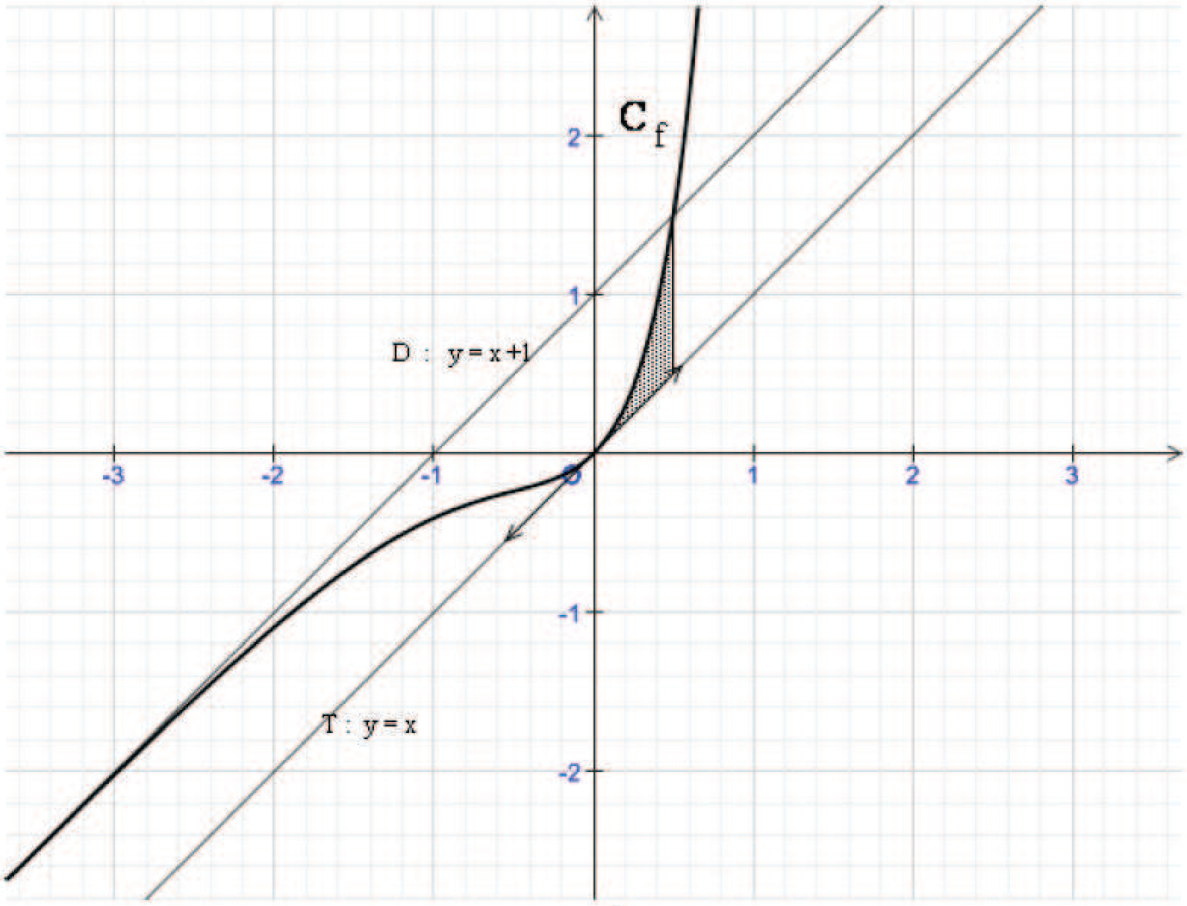
أ- لدينا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ إذن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة O هي:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $(T):\ y=x$.

ب- لدينا f' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$.ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f''(x)=4\left[e^{2x}+2xe^{2x}\right]=4(2x+1)e^{2x}$

بما أن f'' تنعدم في $x_0=-\dfrac{1}{2}$ مع تغيير إشارتها فإن النقطة من $(\mathscr{C}_f)$ التي أفصولها $-\dfrac{1}{2}$ نقطة انعطاف.

5) إنشاء المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$



6) أ-لنبين أن $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1-\frac{e}{2}$

نضع : $u(x)=2x-1$ و $v'(x)=e^{2x}$ إذن $u'(x)=2$ و $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ وبالتالي:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{e}{2}$$

ب-ليكن $x \geq 0$ نضع $h(x)=f(x)-x$ لدينا $h'(x)=f'(x)-1=g(x)-1=4xe^{2x}\geq 0$

وبما أن $h(0)=0$ فإن $h(x)\geq 0 \quad (\forall x\geq 0)$ وبالتالي $|f(x)-x| = f(x)-x \quad \left(\forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$.

إذن مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (T) المماس للمنحى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ هي:

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1+(2x-1)e^{2x}dx\right)\times 4\,cm^2 = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx\right)\times 4cm^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}+1-\frac{e}{2}\right)\times 4cm^2$$

$$= (6-2e)cm^2$$

تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا 2010
الدورة الاستدراكية
ع-ت

التمرين الأول :(3ن) لدينا $A(0,-2,0)$ $B(1.1;-4)$ $C(0.1;-4)$

و معادلة (S) هي $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$

1) مركز الفلكة هو $\Omega(a=1;b=2;c=3)$ إذن $\boxed{\Omega(1,2,3)}$

شعاعها هو $r=\sqrt{1+4+9+11}=\sqrt{25}=5$ إذن $\boxed{r=5}$

2) أ- لدينا $\overrightarrow{AB}(1;3;-4)$ $\overrightarrow{AC}(0;3;-4)$

لدينا
$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & 0\\ \vec{j} & 3 & 3\\ \vec{k} & -4 & -4\end{vmatrix}=0\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}=4\vec{j}+3\vec{k}$$

إذن $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}=4\vec{j}+3\vec{k}}$

نستنتج أن معادلة (ABC) هي $4y+3z+d=0$

(لأن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على (ABC))

و بما أن $A\in(ABC)$ فإن $-8+d=0$ أي $d=8$

و منه $\boxed{(ABC): 4y+3z+8=0}$

ب - لدينا $\Omega(1,2,3)$ إذن $d(\Omega;(ABC))=\dfrac{|4.2+3.3+8|}{\sqrt{16+9}}=\dfrac{25}{\sqrt{25}}=\dfrac{25}{5}=5$

إذن $\boxed{d(\Omega;(ABC))=5}$

نلاحظ أن $d(\Omega;(ABC))=r$

إذن (ABC) **مماس للفلكة** (S)

3) أ- (Δ) المستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC)

إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ موجهة ل (Δ) و $\Omega\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارا متري ل (Δ) هـو :

$$\boxed{(\Delta):\begin{cases}x=1\\ y=2+4t\\ z=3+3t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})}$$

ب- لنحدد H تقاطع (Δ) مع (ABC)

$$H\in(\Delta)\cap(ABC)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2+4t\\ z=3+3t\\ 4y+3z+8=0\end{cases}\Leftrightarrow 4(2+4t)+3(3+3t)+8=0$$

$$\Leftrightarrow 8+16t+9+9t+8=0\Leftrightarrow 25t+25=0$$

$$\Leftrightarrow t=-1$$

و منه $\boxed{H(+1;-2;0)}$

ج- $H\in(S)$ (لأن إحداثياتها تحقق معادلة الفلكة (S))

إذن $H\in(ABC)\cap(S)$ و بالتالي **H هي نقطة التماس**

التمرين الثاني : (3ن)

1) لدينا $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

المميز المختصر هو $\Delta' = 48 - 64 = -16 = (4i)^2$

إذن $z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$ و $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$

إذن $\boxed{S = \{4\sqrt{3} - 4i \,;\, 4\sqrt{3} + 4i\}}$

2) لدينا $A(8i)$ $B(4\sqrt{3} - 4i)$ $C(2(4\sqrt{3} + 4i))$

و $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $M' = R(M)$ و R هو الدوران

الذي مركزه O و زاويته $\frac{4\pi}{3}$.

ا- لدينا

$$M' = R(M) \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{4\pi}{3}}z \Leftrightarrow z' = (\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})z \Leftrightarrow z' = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z$$

إذن $\boxed{z' = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z}$

ب- $(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})8i = -4i - 4\sqrt{3}i^2 = 4\sqrt{3} - 4i$ أي $b = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})a$

إذن $\boxed{B = R(A)}$

ج- $$\frac{a-b}{c-d} = \frac{8i - 4\sqrt{3} + 4i}{8\sqrt{3} + 8i - 4\sqrt{3} + 4i} = \frac{12i - 4\sqrt{3}}{12i + 4\sqrt{3}} = \frac{3i - \sqrt{3}}{3i + \sqrt{3}} = \frac{(3i - \sqrt{3})^2}{-12} = \frac{-6 - 6\sqrt{3}i}{-12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إذن $\boxed{\frac{a-b}{c-d} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

و منه $\frac{a-b}{c-d} = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} = \left[1;\frac{\pi}{3}\right]$

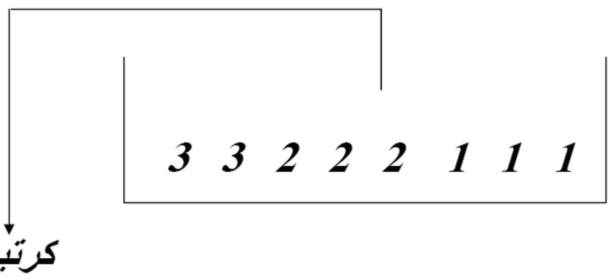
إذن $\boxed{\frac{a-b}{c-d} = \left[1;\frac{\pi}{3}\right]}$

د- لدينا $\left|\frac{a-b}{c-d}\right| = 1 \Rightarrow |a-b| = |c-d| \Rightarrow AB = BC$

و بما أن $(\overline{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{3}$ فان المثلث **ABC متساوي الأضلاع.**

التمرين الثالث : (3ن)

س.ت.د.ا



1) نعتبر الحدثين

A"الحصول على كرتين تحملان الرقم 2"

B " الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل الرقم 3"

$\boxed{p(A) = \frac{A_3^2}{A_8^2} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}}$ و $\boxed{p(B) = \frac{2A_2^1A_6^1 + A_2^2}{A_8^2} = \frac{24+2}{56} = \frac{13}{28}}$

2) X 'عدد الكرات التي تحمل رقما فرديا'

أ- لدينا $X(\Omega)=\{0,1,2\}$

ب- $p(X=1)=\dfrac{2A_5^1A_3^1}{A_8^2}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$

ج- $p(X=0)=p(A)=\dfrac{3}{28}$

$p(X=2)=\dfrac{A_5^2}{A_8^2}=\dfrac{20}{56}=\dfrac{10}{28}=\dfrac{5}{14}$

قانون احتمال X هو:

xi	0	1	2
p(xi)	3/28	15/28	10/28

التمرين الرابع: (3ن)

نعتبر المتتالية $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{21+u_n} \end{cases} ; n\in\mathbb{N}$

1) لنبين بالترجع أن $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$

بالنسبة ل $n=0$ $u_0=1>0$

نفترض أن $u_p\succ 0$ إذن $u_{p+1}=\dfrac{3u_p>0}{21+u_p>0}\succ 0$

و منه $\boxed{u_n>0 \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}}$.

2) لنبين أن $u_{n+1}<\dfrac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

$u_{n+1}-\dfrac{1}{7}u_n=\dfrac{-u_n^{\ 2}}{7(21+u_n)}<0$ إذن $\boxed{u_{n+1}<\dfrac{1}{7}u_n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}}$.

3) لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n^{\ 2}-18u_n}{(21+u_n)}<0$

إذن $u_{n+1}<u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية.

و بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ موجبة (مصغورة ب 0) فإنها متقاربة.

4) ا- لدينا $u_n>0$ و $u_{n+1}<\frac{1}{7}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن
$$\begin{cases} 0<u_1<\frac{1}{7}u_0 \\ 0<u_2<\frac{1}{7}u_1 \\ 0<u_3<\frac{1}{7}u_2 \\ . \\ . \\ . \\ 0<u_n<\frac{1}{7}u_{n-1} \end{cases}$$
بضرب طرف بطرف نحصل على

$0<u_n<\left(\frac{1}{7}\right)^n u_0$ أي $0<u_n<\left(\frac{1}{7}\right)^n$ لان $u_0=1$.

ب- بما أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$ فان $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=0}$.

التمرين الخامس: (8ن)

I- $\forall x\in]0.+\infty[;\ g(x)=x^3-x-2\ln(x)+3$

1) أ- لدينا $\forall x\in]0.+\infty[$

$(x-1)(3x^2+3x+2)=3x^3-x-2$

ب- $\forall x>0 g'(x)=3x^2-1-\frac{2}{x}=\frac{3x^3-x-2}{x}$

$=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

2) أ- $\forall x>0;\frac{3x^2+3x+2}{x}=3x+3+\frac{2}{x}>0$

ب- $g'(x)=(x-1)(\frac{3x^2+3x+2}{x})>0$

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$

3) أ- بما أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$

فإن g تناقصية على $]0.1]$ و تزايدية على $[1;+\infty[$.

ب- بما أن $g(1)=3>0$ فإن $\forall x>0\ \ g(x)>0$.

II- 1) $\forall x>0,\ f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln(x)}{x^2}$

$\forall x>0,$

$$f'(x)=1+\frac{(1+\frac{1}{x})x^2-2x(x-1+\ln x)}{x^4}$$
$$=\frac{x^4+x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4}$$
$$=\frac{x^3-x+3-2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

وبما أن $g(x)>0$ فإن f'(x)>0 إذن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.

2) ا- لدينا $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2} = -\infty$

إذن ζ_f **يقبل محور الأراتيب كمقارب .**

ب- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1+\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2} = 0$

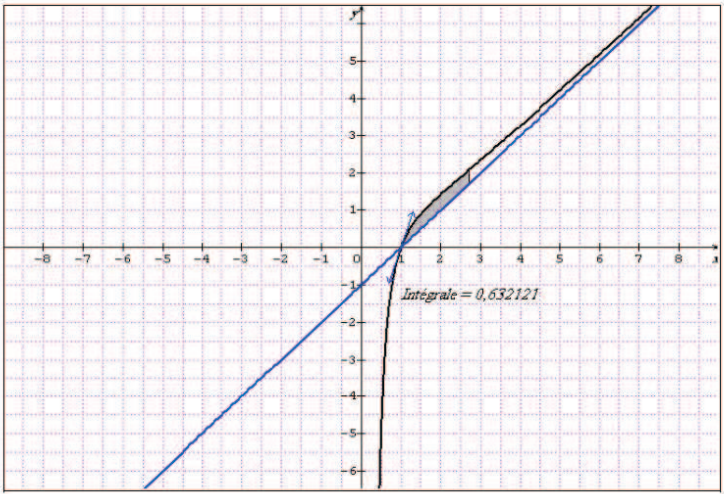
و منه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2} = +\infty$

ج- $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1+\ln x}{x^2} = 0$

إذن $(\Delta): y = x-1$ **مقارب مائل ل** ζ_f **بجوار** $+\infty$

3) لدينا $f'(1)=0$ و $f(1)=0$ إذن معادلة المماس في النقطة التي أفصولها 1 هي $y = 3(x-1)$.

(4



5) ا- نضع $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ و $v(x) = \ln x$

إذن $u(x) = -\frac{1}{x}$ و $v'(x) = \frac{1}{x}$

إذن $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = 1-\frac{2}{e}$

أي $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 1-\frac{2}{e}$

ب- $A(\Delta) = \int_1^e f(x)-(x-1)dx = \int_1^e (\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2})dx = \left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^e + 1-\frac{2}{e} = (1-\frac{1}{e})cm^2$

إذن $A(\Delta) = (1-\frac{1}{e})cm^2$.

تصحيح الامتحان الوطني: دورة يونيو 2011

التمرين الأول

1. أ- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^2+4x-5=0$.

لدينا مميز المعادلة المقترحة هو: $\Delta=b^2-4ac$ حيث: $a=1$ و $b=4$ و $c=-5$

$$=16+20$$
$$=36=6^2$$

إذن: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-6}{2}=-5$ و $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+6}{2}=1$

وبالتالي: $\boxed{S_{\mathbb{R}}=\{-5;1\}}$

ب - لنحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$

تذكير: $\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2\ ;\ \ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$:

$\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2\ ;\ \ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b$:

- لكل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $2x>0$ و $x+2>0$ و $x^2+5>0$

لدينا: $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)\Leftrightarrow\ln(x^2+5)=\ln(2x\times(x+2))$

$$\Leftrightarrow\ln(x^2+5)=\ln(2x^2+4x)$$

$\Leftrightarrow x^2+5=2x^2+4x$ (انظر التذكير)

$$\Leftrightarrow x^2+4x-5=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ أو $x=-5$ (حسب السؤال 1.أ:)

بما أن $x\in]0;+\infty[$ فإن: $x=1$ إذن: $\boxed{S_{]0;+\infty[}=\{1\}}$

2. لنحل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة: $\ln(x)+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)$

تذكير: $\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2\ ;\ \ln(a)\geq\ln(b)\Leftrightarrow a\geq b$:

- لكل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $x>0$ و $x+1>0$ و $x^2+1>0$.

لدينا: $\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)\Leftrightarrow\ln(x^2+x)\geq\ln(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow x^2+x\geq x^2+1$$
$$\Leftrightarrow x\geq1$$

إذن: $\boxed{S_{]0;+\infty[}=[1;+\infty[}$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{u_n}{5+8u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1. لنبين بالترجع أن $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$

- من أجل $n=0$: لدينا $u_0=1$ و $1>0$ يعني أن: $u_0>0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.
- ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن: $u_n>0$ ونبين أن $u_{n+1}>0$

حسب الافتراض لدينا $u_n>0$ ومنه: $8u_n>0$ وبالتالي $5+8u_n>0$ أي: $\frac{1}{5+8u_n}>0$

إذن : $\frac{u_n}{5+8u_n}>0$ أي : $u_{n+1}>0$

حسب مبدأ الترجع لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n>0$.

2. نضع : $v_n=\frac{1}{u_n}+2$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- • لنبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$.

ليكن n من $\mathbb{N}$

لدينا : $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}+2=\frac{5+8u_n}{u_n}+2=\frac{5+8u_n+2u_n}{u_n}=\frac{5(1+2u_n)}{u_n}=5.\left(\frac{1}{u_n}+2\right)=5.v_n$

إذن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_{n+1}=5.v_n}$ وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$.

• لنكتب v_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$

لدينا: (v_n) متتالية هندسية . حسب صيغة الحد العام لدينا : $v_n=v_0q^n$ لكل n من $\mathbb{N}$. حيث : $q=5$

و $v_0=\frac{1}{u_0}+2=\frac{1}{1}+2=3$

وبالتالي : $\boxed{v_n=3\times5^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}}$ (*) .

ب- • لنكتب u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$

لدينا : $v_n=\frac{1}{u_n}+2$ لكل n من $\mathbb{N}$. ومنه $u_n=\frac{1}{v_n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن : $\boxed{u_n=\frac{1}{3\times5^n-2} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}}$. حسب النتيجة (*) .

• حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}5^n=+\infty$ (لأن $5>1$) ومنه : $\lim_{n\to+\infty}(3\times5^n-2)=+\infty$

$\boxed{\text{وبالتالي: } \lim_{n\to+\infty}u_n=0}$.

التمرين الثالث :

1 . لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-18z+82=0$.

لدينا مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=(-18)^2-4\times1\times82=324-328=-4=(2i)^2$

إذن للمعادلة المقترحة حلين عقديين مترافقين هما : $z_1=\frac{18+2i}{2}=9+i$ و $z_2=\frac{18-2i}{2}=9-i$

أي : $\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{9-i\ ;\ 9+i\}}$

2 . المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=9+i$ و $b=9-i$ و $c=11-i$.

أ- • لنبين أن : $\frac{c-b}{a-b}=-i$.

لدينا : $\frac{c-b}{a-b}=\frac{11-i-(9-i)}{9+i-(9-i)}=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$.

• الاستنتاج : طبيعة المثلث ABC .

لدينا :
$$\left(\overline{\overline{BA}};\overline{\overline{BC}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)\quad[2\pi]$$
$$\equiv\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)\quad[2\pi]$$
$$\equiv\arg(-i)\quad[2\pi]$$
$$\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]\quad\left(\equiv-\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]\right)$$

إذن : $(BA)\perp(BC)$ أي المثلث ABC قائم الزاوية في B ①

ولدينا : $\frac{BC}{BA}=\frac{|c-b|}{|a-b|}=\left|\frac{c-b}{a-b}\right|=|-i|=1$ ($|xxx|=$ معيـار xxx)

ومنه $\frac{BC}{BA}=1$ وبالتالي : $BA=BC$ ②

من ① و ② نستنتج أن : $\boxed{ABC \text{ مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في } B}$

ب- الشكل المثلث للعدد العقدي $4(1-i)$

تذكير : ✍ : لكل z من $\mathbb{C}$. حيث : $|z|$ هو معيار العدد العقدي z و $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$

لدينا : $z=|z|(Cos\theta+iSin\theta)$

لدينا : $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+iSin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

إذن : $\boxed{4(1-i)=4\sqrt{2}\left(Cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+iSin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$ (*)

ج- • لنبين أن : $(c-a)(c-b)=4(1-i)$

لدينا :
$$(c-a)(c-b)=(11-i-9-i)(11-i-9+i)$$
$$=2(2-2i)$$
$$=4(1-i)$$

• الاستنتاج

لدينا :
$$AC\times BC=|c-a|\times|c-b|$$
$$=|(c-a)(c-b)|$$
$$=|4(1-i)|$$
$$=4\sqrt{2}$$
(حسـب العلاقـة (*))

د- ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق نقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه B وزاويته $\frac{3\pi}{2}$

♦ لنبين أن : $z'=-iz+10+8i$.

لدينا: R الدوران الذي مركزه $B(9-i)$ وزاويته $\frac{3\pi}{2}$ ويحول M إلى M'.

إذن : $z'-z_B=e^{\frac{3\pi}{2}}(z-z_B)$

يعني : $z'=e^{\frac{3\pi}{2}}(z-z_B)+z_B$

$$z'=e^{\frac{3\pi}{2}}(z-z_B)+z_B \Leftrightarrow z'=\left(Cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+iSin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)(z-9+i)+9-i$$

$$\Leftrightarrow z'=-i(z-9+i)+9-i$$

$$\Leftrightarrow z'=-iz+9i+1+9-i$$

$$\Leftrightarrow z'=-iz+10+8i$$

وبالتالي : $\boxed{z'=-iz+10+8i}$

♦ تحديد لحق النقطة C' صورة C بالدوران R

$$R(C)=C' \Leftrightarrow z_{C'}=-iz_C+10+8i$$

$$\Leftrightarrow z_{C'}=-i(11-i)+10+8i$$

$$\Leftrightarrow z_{C'}=-11i-1+10+8i$$

$$\Leftrightarrow z_{C'}=9-3i$$

إذن: $\boxed{\text{لحق النقطة } C' \text{ هو } z_{C'}=9-3i}$

التمرين الرابع :

I . نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=(1-x)e^x-1$.

1. أ- حساب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ليكن x من $\mathbb{R}$، لدينا : $g'(x)=((1-x)e^x-1)'=(1-x)'\times e^x+(1-x)\times(e^x)'$

$$=-e^x+(1-x)e^x$$

$$=\cancel{-e^x}+\cancel{e^x}-xe^x$$

$$=-xe^x$$

إذن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g'(x)=-xe^x}$

ب- رتابة الدالة g على كل من المجالين : $]-\infty;0]$ و $[0;+\infty[$

➤ نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ e^x>0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة x . [لأن : $g'(x)=-xe^x$]

وبالتالي : إذا كان $x\in[0;+\infty[$ فإن $g'(x)\leq 0$. ومنه g دالة تناقصية على المجال $[0;+\infty[$

و إذا كان $x\in]-\infty;0]$ فإن $g'(x)\geq 0$. ومنه g دالة تزايدية على المجال $]-\infty;0]$

➤ حساب $g(0)$

لدينا : $g(0)=(1-0)e^{0}-1=1-1=0$.

2. لنبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)\le 0$

لدينا : جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$					
g	-1	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$-\infty$

g دالة متصلة وتقبل $g(0)$ كقيمة قصوية مطلقة على $\mathbb{R}$ عند 0

يعني : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)\le g(0)$

أي : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)\le 0$ (لأن : $g(0)=0$) .

<u>طريقة 02</u>

لدينا : g تزايدية على : $]-\infty;0]$ إذن : $\forall x\in]-\infty;0]\ ;\ g(x)\le g(0)$ (تعـريف دالــة تزايديــة)

ولدينا : g تناقصية على : $[0;+\infty[$ إذن : $\forall x\in[0;+\infty[\ ;\ g(x)\le g(0)$ (تعـريف دالــة تناقصيــة)

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)\le g(0)$. يعني : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)\le 0$ (لأن : $g(0)=0$).

II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(2-x)e^{x}-x$. وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm)$.

1. أ- لنبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^{x}=(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2-x)e^{x}-x\right]=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

<u>ملاحظة : يمكن أيضا التعميل ب x ثم الحساب</u>

ب- لنبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

لدينا : $(2-x)e^{x}-x=x\left[\left(\frac{2}{x}-1\right)e^{x}-1\right]$ ومنه : $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{2}{x}-1\right)e^{x}-1$

وحيث أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}-1\right)=-1$

فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{2}{x}-1\right)e^{x}-1\right]=(-1)\times(+\infty)-1=-\infty}$

➤ الاستنتاج :

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ فإن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب (الســـالبة) بجوار $+\infty$.

2. أ- حسابالنهاية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

لدينا : $f(x)=2e^{x}-xe^{x}-x$

وحيث أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 2\times\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x - x) = 0 - 0 + \infty = +\infty$

أي : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

➤ حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]$

لدينا : $f(x)+x = 2e^x - xe^x - x + x = 2e^x - xe^x$

وحيث أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 2\times\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x) = 0$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right] = 0}$

ملاحظة :

لدينا : $f(x)+x = (2-x)e^x = -(x-2)e^{x-2}\times e^2$

نضع : $x-2=t$ إذن : $x\to-\infty \Leftrightarrow t\to-\infty$

وبالتالي :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right] &= \lim_{x\to-\infty}\left[-(x-2)e^{x-2}\times e^2\right]\\ &= (-e^2)\times\underbrace{\lim_{t\to-\infty}(te^t)}_{=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

ب- لنبين أن : $(D): y=-x$ مقارب مائل.

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right] = 0$ يعني : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right] = 0$

إذن : المستقيم (D) الذي معادلته : $y=-x$.مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$

3.أ- لنبين أن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ليكن x من $\mathbb{R}$.

لدينا :
$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((2-x)e^x - x\right)'\\ &= \left((2-x)e^x\right)' - x'\\ &= (2-x)'e^x + (2-x)(e^x)' - 1\\ &= -e^x + (2-x)e^x - 1\\ &= (1-x)e^x - 1\\ &= g(x)\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=g(x)}$

ب- تأويل النتيجة $f'(0)=0$.

نعلم أنه إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن منحنى الدالة f ؛ يقبل في النقطة ذات الأفصول x_0 ؛ مماس معامله الموجه $f'(x_0)$ ومعادلته : $(T): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

* لدينا : f دالة قابلة للاشتقاق في 0 كمجموع وجداء دوال قابلة للاشتقاق في 0

* و لدينا : $f'(0) = g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 0$

إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل في النقطة $F(0;2)$ مماس معامله الموجه $f'(0)=0$ أي موازي لمحور الأفاصيل .

ج - رتابة الدالة f.

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,g(x)\leq 0$ و $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,f(x)=g(x)$. إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,f'(x)\leq 0$

وبما أن : f' تنعدم في نقطة معزولة 0 . فإن الدالة f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4 . لنبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ وأن : $\frac{3}{2}<\alpha<2$

لدينا : f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ كمجموع وجداء دوال متصلة على $\mathbb{R}$

$u:x\mapsto -x$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها حدودية

$v:x\mapsto 2-x$ .. ..

$w:x\mapsto e^{x}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ (.. تعريف الدالة الأسية ...)

و $f=v\times w+u$

ولدينا : f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

و $f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[=\left]-\infty;+\infty\right[$

و $0\in\left]-\infty;+\infty\right[$

إذن: حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد α وحيد في $\mathbb{R}$ بحيث $f(x)=0$

يعني أن : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

وحيث أن : $f(2)\times f\left(\frac{3}{2}\right)<0$ لأن : $f(2)=-2<0$ و $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}}-3\right)>0$

فإن : $\frac{3}{2}<\alpha<2$ (حسب مبرهنة القيم الوسيطية)

5. أ- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)+x=0$

لدينا : $f(x)=(2-x)e^{x}-x$ و $(D):y=-x$

$$
\begin{aligned}
f(x)+x=0 &\Leftrightarrow (2-x)e^{x}-x+x=0\\
&\Leftrightarrow (2-x)e^{x}=0\\
&\Leftrightarrow 2-x=0 \text{ أو } \underbrace{e^{x}=0}_{\text{غير ممكن}}\\
&\Leftrightarrow x=2
\end{aligned}
$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x)+x=0$ هي : $\{2\}$ $(*)$.

➢ تحديد تقاطع $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f والمستقيم (D) الذي معادلته $y=-x$.

من أجل ذلك نحل المعادلة : $f(x)=-x$ لأن : $M(x,y)\in(D)\cap(\mathscr{C})\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(D)\\M\in(\mathscr{C})\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\y=f(x)\end{cases}$$

لدينا : $f(x)=-x\Leftrightarrow f(x)+x=0$

$\Leftrightarrow x=2$ (حسب ماسبق $(*)$)

إذن $(\mathscr{C})$ و (D) يتقاطعان في النقطة $A(2;-2)$ $(f(2)=-2$ أو $y=-2)$

ب- دراسة إشارة $f(x)+x$ على $\mathbb{R}$

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)+x=(2-x)e^x$ ونعلم أن: $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ e^x>0$

إذن إشارة $f(x)+x$ هي إشارة $2-x$

وبالتالي : $\forall x\in]-\infty;2]\ ;f(x)+x\geq0$ و $\forall x\in[2;+\infty[\ ;f(x)+x\leq0$ $(**)$

ج- وضع $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (D).

من العلاقة $(**)$ أعلاه نستنتج أن :

- $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (D) على $]-\infty;2[$
- $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (D) على $]2;+\infty[$
- $(\mathscr{C})$ يقطع المستقيم (D) في النقطة ذات الأفصول 2

6. أ - تحديد نقط انعطاف المنحنى $(\mathscr{C})$

ليكن x من $\mathbb{R}$

لدينا : $f''(x)=(f'(x))'$

$=g'(x)$

$=-xe^x$ (حسب السؤال I-1-أ)

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;f''(x)=-xe^x$

ولدينا : $f''(x)=0\Leftrightarrow -xe^x\geq0$

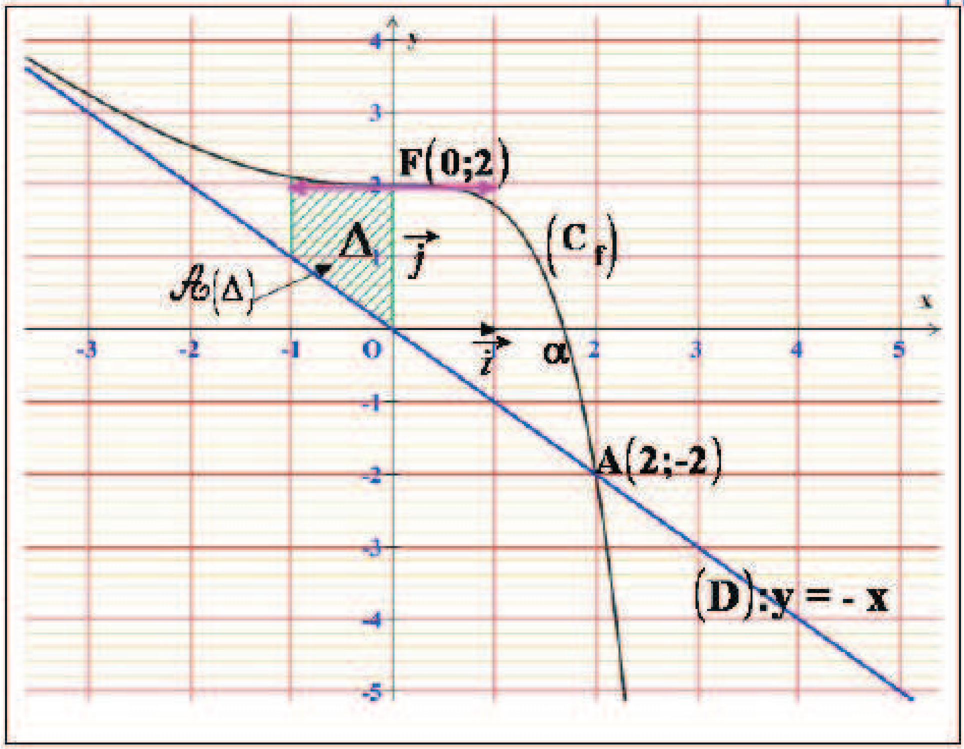
$\Leftrightarrow -x\geq0$ (لأن $e^x>0$)

$\Leftrightarrow x\leq0$

ومنه : f'' تنعدم وتغير الإشارة في : 0 .

وبالتالي $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0;2)$

ب- إنشاء المنحنى $(\mathscr{C})$



7. أ – حساب التكامل: $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx$

نضع : $\begin{cases} u(x)=2-x \\ v'(x)=e^x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x)=-1 \\ v(x)=e^x \end{cases}$

u و v قابلتين للاشتقاق على $[-1;0]$ بحيث : u' و v' متصلتين على $[-1;0]$

إذن :

$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx=\left[(2-x)e^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^x dx$$
$$=2-\left(3e^{-1}\right)+\left[e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$=2-\frac{3}{e}+1-\frac{1}{e}$$
$$=3-\frac{4}{e}$$

إذن : $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx=3-\frac{4}{e}$

ب- مساحة الحيز Δ المحصور بين $(\mathscr{C})$ والمستقيم $(\mathscr{D})$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=-1$

لدينا: $\mathcal{A}(\Delta)=\int_{-1}^{0}|f(x)-y|dx$ بوحدة قياس المساحة

بما أن: $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (D) على $[-1;0]$.

فإن : $|f(x)-y|=|f(x)+x|=f(x)+x=(2-x)e^x$

وبالتالي : $\mathcal{A}(\Delta)=\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx$ بوحدة قياس المساحة .

وحسب السؤال أ- : $\mathcal{A}(\Delta)=\left(3-\frac{4}{e}\right)cm^2$

التمرين الأول

1. أ- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2+4x-5=0$.

لدينا مميز المعادلة المقترحة هو : $\Delta = b^2-4ac$ حيث : $a=1$ و $b=4$ و $c=-5$

$$=16+20$$
$$=36=6^2$$

إذن : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-6}{2}=-5$ و $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+6}{2}=1$

وبالتالي: $\boxed{S_{\mathbb{R}}=\{-5;1\}}$

ب - لنحل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$

تذكير : $\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2 \;;\; \ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$

$\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2 \;;\; \ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b$

- لكل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $2x>0$ و $x+2>0$ و $x^2+5>0$

لدينا : $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)\Leftrightarrow \ln(x^2+5)=\ln(2x\times(x+2))$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+5)=\ln(2x^2+4x)$$

$\Leftrightarrow x^2+5=2x^2+4x$ (انظر التذكير)

$$\Leftrightarrow x^2+4x-5=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ أو $x=-5$ (حسب السؤال 1.أ:)

بما أن $x\in]0;+\infty[$ فإن : $x=1$ إذن : $\boxed{S_{]0;+\infty[}=\{1\}}$

2. لنحل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $\ln(x)+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)$

تذكير : $\forall(a;b)\in(]0;+\infty[)^2 \;;\; \ln(a)\geq\ln(b)\Leftrightarrow a\geq b$

- لكل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $x>0$ و $x+1>0$ و $x^2+1>0$.

لدينا : $\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)\Leftrightarrow \ln(x^2+x)\geq\ln(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow x^2+x\geq x^2+1$$
$$\Leftrightarrow x\geq 1$$

إذن : $\boxed{S_{]0;+\infty[}=[1;+\infty[}$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{5+8u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1. لنبين بالترجع أن $u_n>0$ لكل n من $\mathbb{N}$

➤ من أجل $n=0$: لدينا $u_0=1$ و $1>0$ يعني أن : $u_0>0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

➤ ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن : $u_n>0$ ونبين أن $u_{n+1}>0$

حسب الافتراض لدينا $u_n>0$ ومنه : $8u_n>0$ وبالتالي $5+8u_n>0$ أي : $\dfrac{1}{5+8u_n}>0$

إذن : $\frac{u_n}{5+8u_n}>0$ أي : $u_{n+1}>0$

حسب مبدأ الترجع لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n>0$.

2. نضع : $v_n=\frac{1}{u_n}+2$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- • لنبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$.

ليكن n من $\mathbb{N}$

لدينا : $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}+2=\frac{5+8u_n}{u_n}+2=\frac{5+8u_n+2u_n}{u_n}=\frac{5(1+2u_n)}{u_n}=5.\left(\frac{1}{u_n}+2\right)=5.v_n$

إذن : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_{n+1}=5.v_n}$ وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=5$.

• لنكتب v_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$

لدينا: (v_n) متتالية هندسية . حسب صيغة الحد العام لدينا : $v_n=v_0q^n$ لكل n من $\mathbb{N}$. حيث : $q=5$

و $v_0=\frac{1}{u_0}+2=\frac{1}{1}+2=3$

وبالتالي : $\boxed{v_n=3\times5^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}}$. (*)

ب-• لنكتب u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$

لدينا : $v_n=\frac{1}{u_n}+2$ لكل n من $\mathbb{N}$. ومنه $u_n=\frac{1}{v_n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن : $\boxed{u_n=\frac{1}{3\times5^n-2} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ . حسب النتيجة } (*) .}$

• حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}5^n=+\infty$ (لأن $5>1$) ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}(3\times5^n-2)=+\infty$

$\boxed{\text{وبالتالي: } \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0 \ .}$

التمرين الثالث :

1 . لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-18z+82=0$.

لدينا مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=(-18)^2-4\times1\times82=324-328=-4=(2i)^2$

إذن للمعادلة المقترحة حلين عقديين مترافقين هما : $z_1=\frac{18+2i}{2}=9+i$ و $z_2=\frac{18-2i}{2}=9-i$

أي : $\boxed{S_{\mathbb{C}}=\{9-i\ ;\ 9+i\}}$

2 . المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد منظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=9+i$ و $b=9-i$ و $c=11-i$.

أ- • لنبين أن : $\frac{c-b}{a-b}=-i$.

لدينا : $\dfrac{c-b}{a-b}=\dfrac{11-i-(9-i)}{9+i-(9-i)}=\dfrac{2}{2i}=\dfrac{1}{i}=-i$.

• الاستنتاج : طبيعة المثلث ABC .

لدينا :
$$\left(\overline{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)\ [2\pi]$$
$$\equiv\arg(-i)\ [2\pi]$$
$$\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]\quad\left(\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right)$$

إذن : $(BA)\perp(BC)$ أي المثلث ABC قائم الزاوية في B ①

ولدينا : $\dfrac{BC}{BA}=\dfrac{|c-b|}{|a-b|}=\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right|=|-i|=1$　　(معيار xxx $=|xxx|$)

ومنه $\dfrac{BC}{BA}=1$ وبالتالي : $BA=BC$ ②

من ① و ② نستنتج أن : $\boxed{ABC \text{ مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في } B}$

ب- الشكل المثلث للعدد العقدي $4(1-i)$

تذكير : ✍ : لكل z من $\mathbb{C}$. حيث : $|z|$ هو معيار العدد العقدي z و $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$

لدينا : $z=|z|(Cos\theta+iSin\theta)$

لدينا : $1-i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(Cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+iSin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

إذن : $\boxed{4(1-i)=4\sqrt{2}\left(Cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+iSin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$　$(*)$

ج- • لنبين أن : $(c-a)(c-b)=4(1-i)$

لدينا :
$$(c-a)(c-b)=(11-i-9-i)(11-i-9+i)$$
$$=2(2-2i)$$
$$=4(1-i)$$

• الاستنتاج

لدينا :
$$AC\times BC=|c-a|\times|c-b|$$
$$=|(c-a)(c-b)|$$
$$=|4(1-i)|$$
$$=4\sqrt{2}$$
(حسب العلاقة $(*)$)

د- ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق نقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه B وزاويته $\frac{3\pi}{2}$

♦ لنبين أن : $z'=-iz+10+8i$.

لدينا: R الدوران الذي مركزه $B(9-i)$ وزاويته $\frac{3\pi}{2}$ ويحول M إلى M' .

إذن : $z'-z_B=e^{\frac{3\pi}{2}}(z-z_B)$

يعني : $z'=e^{\frac{3\pi}{2}}(z-z_B)+z_B$

$$z'=e^{\frac{3\pi}{2}}(z-z_B)+z_B \Leftrightarrow z'=\left(Cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+iSin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)(z-9+i)+9-i$$

$$\Leftrightarrow z'=-i(z-9+i)+9-i$$

$$\Leftrightarrow z'=-iz+9i+1+9-i$$

$$\Leftrightarrow z'=-iz+10+8i$$

وبالتالي : $\boxed{z'=-iz+10+8i}$

♦ تحديد لحق النقطة C' صورة C بالدوران R

$$R(C)=C' \Leftrightarrow z_{C'}=-iz_C+10+8i$$

$$\Leftrightarrow z_{C'}=-i(11-i)+10+8i$$

$$\Leftrightarrow z_{C'}=-11i-1+10+8i$$

$$\Leftrightarrow z_{C'}=9-3i$$

إذن: $\boxed{\text{لحق النقطة } C' \text{ هو } z_{C'}=9-3i}$

التمرين الرابع :

I . نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=(1-x)e^x-1$.

1. أ- حساب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ليكن x من $\mathbb{R}$ ؛ لدينا : $g'(x)=((1-x)e^x-1)'=(1-x)'\times e^x+(1-x)\times(e^x)'$

$$=-e^x+(1-x)e^x$$

$$=\cancel{-e^x}+\cancel{e^x}-xe^x$$

$$=-xe^x$$

إذن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g'(x)=-xe^x}$

ب- رتابة الدالة g على كل من المجالين : $]-\infty;0]$ و $[0;+\infty[$

➤ نعلم أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ e^x>0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة x . [لأن : $g'(x)=-xe^x$]

وبالتالي : إذا كان $x\in[0;+\infty[$ فإن $g'(x)\le 0$. ومنه g دالة تناقصية على المجال $[0;+\infty[$

و إذا كان $x\in]-\infty;0]$ فإن $g'(x)\ge 0$. ومنه g دالة تزايدية على المجال $]-\infty;0]$

➢ حساب $g(0)$

لدينا : $g(0)=(1-0)e^{0}-1=1-1=0$.

2. لنبين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)\leq 0$

لدينا : جدول تغيرات الدالة g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$					
g	-1	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$-\infty$

g دالة متصلة وتقبل $g(0)$ كقيمة قصوية مطلقة على $\mathbb{R}$ عند 0

يعني : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)\leq g(0)$

أي : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)\leq 0$ (لأن : $g(0)=0$).

<u>طريقة 02</u>

لدينا : g تزايدية على : $]-\infty;0]$ إذن : $\forall x\in]-\infty;0]\ ;\ g(x)\leq g(0)$ (تعريف دالة تزايدية)

ولدينا : g تناقصية على : $[0;+\infty[$ إذن : $\forall x\in[0;+\infty[\ ;\ g(x)\leq g(0)$ (تعريف دالة تناقصية)

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)\leq g(0)$. يعني : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ g(x)\leq 0$ (لأن : $g(0)=0$).

II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(2-x)e^{x}-x$. وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $\left(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm\right)$.

1. أ- لنبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^{x}=(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2-x)e^{x}-x\right]=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$

ملاحظة : يمكن أيضا التعميل ب x ثم الحساب

ب- لنبين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$

لدينا : $(2-x)e^{x}-x=x\left[\left(\dfrac{2}{x}-1\right)e^{x}-1\right]$ ومنه : $\dfrac{f(x)}{x}=\left(\dfrac{2}{x}-1\right)e^{x}-1$

وحيث أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x}-1\right)=-1$

فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{2}{x}-1\right)e^{x}-1\right]=(-1)\times(+\infty)-1=-\infty}$

➢ الاستنتاج :

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ فإن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب (السالبة) بجوار $+\infty$.

2. أ- حساب النهاية: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

لدينا : $f(x)=2e^{x}-xe^{x}-x$

وحيث أن : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} 2e^x = 2\times\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

فإن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2e^x - xe^x - x\right) = 0 - 0 + \infty = +\infty$

أي : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

➤ حساب النهاية : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]$

لدينا : $f(x)+x = 2e^x - xe^x - x + x = 2e^x - xe^x$

وحيث أن : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} 2e^x = 2\times\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ فإن : $\lim_{x\to-\infty}\left(2e^x - xe^x\right) = 0$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+x\right] = 0}$

__ملاحظة :__

لدينا : $f(x)+x = (2-x)e^x = -(x-2)e^{x-2}\times e^2$

نضع : $x-2=t$ إذن : $x\to-\infty \Leftrightarrow t\to-\infty$

وبالتالي :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right] &= \lim_{x\to-\infty}\left[-(x-2)e^{x-2}\times e^2\right]\\ &= (-e^2)\times\underbrace{\lim_{t\to-\infty}\left(te^t\right)}_{=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

ب- لنبين أن : $(D): y=-x$ مقارب مائل.

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right] = 0$ يعني : $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-y\right] = 0$

إذن : المستقيم (D) الذي معادلته : $y=-x$.مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$

3. أ- لنبين أن : $f'(x)=g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ليكن x من $\mathbb{R}$.

لدينا :
$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((2-x)e^x - x\right)'\\ &= \left((2-x)e^x\right)' - x'\\ &= (2-x)'e^x + (2-x)\left(e^x\right)' - 1\\ &= -e^x + (2-x)e^x - 1\\ &= (1-x)e^x - 1\\ &= g(x)\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=g(x)}$

ب- تأويل النتيجة $f'(0)=0$.

نعلم أنه إذا كانت دالة f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن منحنى الدالة f ؛ يقبل في النقطة ذات الأفصول x_0؛ مماس معامله الموجه $f'(x_0)$ ومعادلته : $(T): y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

* لدينا : f دالة قابلة للاشتقاق في 0 كمجموع وجداء دوال قابلة للاشتقاق في 0

* و لدينا : $f'(0) = g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 0$

إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ ؛ يقبل في النقطة $F(0;2)$ مماس معامله الموجه $f'(0)=0$ أي موازي لمحور الأفاصيل .

ج - رتابة الدالة f.

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,g(x)\le 0$ و $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,f(x)=g(x)$. إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\,;\,f'(x)\le 0$

وبما أن : f' تنعدم في نقطة معزولة 0 . فإن الدالة f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4 . لنبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ وأن : $\frac{3}{2}<\alpha<2$

لديناِ : f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ كمجموع وجداء دوال متصلة على $\mathbb{R}$

$u:x\mapsto -x$ متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها حدودية

$v:x\mapsto 2-x$ .. ..

$w:x\mapsto e^x$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ (.. تعريف الدالة الأسية ...)

و $f=v\times w+u$

ولدينا : f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

و $f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right[=\left]-\infty;+\infty\right[$

و $0\in\left]-\infty;+\infty\right[$

إذن: حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد α وحيد في $\mathbb{R}$ بحيث $f(x)=0$

يعني أن : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

وحيث أن : $f(2)\times f\left(\frac{3}{2}\right)<0$ لأن : $f(2)=-2<0$ و $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}}-3\right)>0$

فإن : $\frac{3}{2}<\alpha<2$ (حسب مبرهنة القيم الوسيطية)

5. أ- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)+x=0$

لدينا : $f(x)=(2-x)e^x-x$ و $(D):y=-x$

$$\begin{aligned}f(x)+x=0&\Leftrightarrow(2-x)e^x-x+x=0\\&\Leftrightarrow(2-x)e^x=0\\&\Leftrightarrow 2-x=0 \text{ أو } \underbrace{e^x=0}_{\text{غير ممكن}}\\&\Leftrightarrow x=2\end{aligned}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(x)+x=0$ هي : $\{2\}$ $.(*)$

➤ تحديد تقاطع $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f والمستقيم (D) الذي معادلته $y=-x$.

من أجل ذلك نحل المعادلة : $f(x)=-x$ لأن : $M(x,y)\in(D)\cap(\mathscr{C})\Leftrightarrow\begin{cases}M\in(D)\\M\in(\mathscr{C})\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-x\\y=f(x)\end{cases}$$

لدينا : $f(x)=-x\Leftrightarrow f(x)+x=0$

$\Leftrightarrow x=2$ (حسب ماسبق $(*)$)

إذن $(\mathscr{C})$ و (D) يتقاطعان في النقطة $A(2;-2)$ $(\mathrm{f}(2)=-2$ أو $y=-2)$

ب- دراسة إشارة $f(x)+x$ على $\mathbb{R}$

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)+x=(2-x)e^x$ ونعلم أن: $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ e^x>0$

إذن إشارة $f(x)+x$ هي إشارة $2-x$

وبالتالي : $\forall x\in]-\infty;2]\ ;f(x)+x\geq0$ و $\forall x\in[2;+\infty[\ ;f(x)+x\leq0$ $(**)$

ج- وضع $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (D).

من العلاقة $(**)$ أعلاه نستنتج أن :

- $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (D) على $]-\infty;2[$
- $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (D) على $]2;+\infty[$
- $(\mathscr{C})$ يقطع المستقيم (D) في النقطة ذات الأفصول 2

6. أ- تحديد نقط انعطاف المنحنى $(\mathscr{C})$

ليكن x من $\mathbb{R}$

لدينا : $f''(x)=(f'(x))'$

$=g'(x)$

$=-xe^x$ (حسب السؤال I-1-أ)

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ ;f''(x)=-xe^x$

ولدينا : $f''(x)=0\Leftrightarrow-xe^x\geq0$

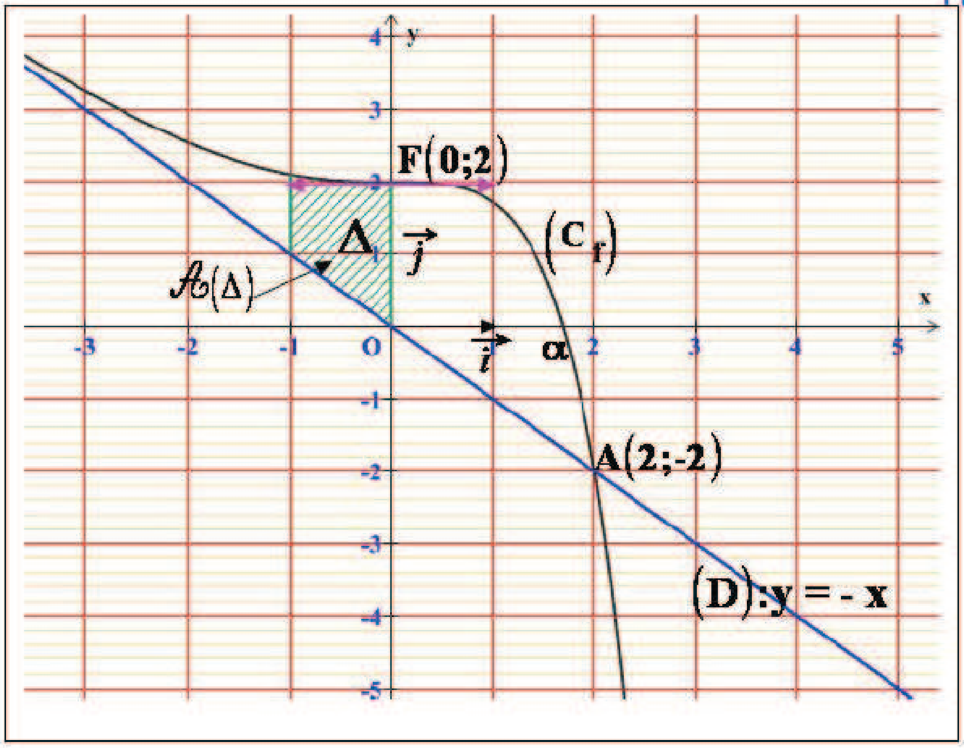
$\Leftrightarrow-x\geq0$ (لأن $e^x>0$)

$\Leftrightarrow x\leq0$

ومنه : f'' تنعدم وتغير الإشارة في : 0 .

وبالتالي $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0;2)$

ب- إنشاء المنحنى $(\mathscr{C})$



7. أ – حساب التكامل: $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx$

نضع : $\begin{cases} u(x)=2-x \\ v'(x)=e^x \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} u'(x)=-1 \\ v(x)=e^x \end{cases}$

u و v قابلتين للاشتقاق على $[-1;0]$ بحيث : u' و v' متصلتين على $[-1;0]$

إذن :
$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx=\left[(2-x)e^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}-e^x dx$$
$$=2-\left(3e^{-1}\right)+\left[e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$=2-\frac{3}{e}+1-\frac{1}{e}$$
$$=3-\frac{4}{e}$$

إذن : $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx=3-\frac{4}{e}$

ب- مساحة الحيز Δ المحصور بين $(\mathscr{C})$ والمستقيم $(\mathscr{D})$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=-1$

لدينا: $\mathscr{A}(\Delta)=\int_{-1}^{0}\left|f(x)-y\right|dx$ بوحدة قياس المساحة

بما أن: $(\mathscr{C})$ يوجد فوق المستقيم (D) على $[-1;0]$.

فإن : $\left|f(x)-y\right|=\left|f(x)+x\right|=f(x)+x=(2-x)e^x$

وبالتالي : $\mathscr{A}(\Delta)=\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx$ بوحدة قياس المساحة .

وحسب السؤال أ- : $\mathscr{A}(\Delta)=\left(3-\frac{4}{e}\right)cm^2$

تصحيح الدورة الاستدراكية2011

ذ.محمد الكيال

التمرين الأول

1) أ- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2-2x-3=0$

مميز المعادلة المقترحة هو $\Delta=b^2-4ac=4+12=16$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+4}{2}=3 \quad \text{و} \quad x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-4}{2}=-1$$

ومنه $\boxed{S=\{-1;3\}}$

ب- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^x-\frac{3}{e^x}-2=0$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$

$$e^x-\frac{3}{e^x}-2=0 \Leftrightarrow \frac{\left(e^x\right)^2-3-2e^x}{e^x}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-2e^x-3=0$$

بوضع $X=e^x$ المعادلة تصبح : $X^2-2X-3=0$

وحسب نتيجة السؤال1- أ - نستنتج أن $X=-1$ أو $X=3$

$$X=3 \Leftrightarrow e^x=3$$
$$\Leftrightarrow x=\ln 3$$
$$X=-1 \Leftrightarrow e^x=-1$$

هذا غير ممكن لان $\forall x\in\mathbb{R} \quad e^x\succ 0$

2) لنحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $e^{x+1}-e^{-x}\geq 0$

<u>تذكير :</u> $e^x>e^y \Leftrightarrow x>y \qquad \forall y\in\mathbb{R} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

$$e^{x+1}-e^{-x}\geq 0 \Leftrightarrow e^{x+1}\geq e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow x+1\geq -x$$
$$\Leftrightarrow 2x\geq -1$$
$$\Leftrightarrow x\geq \frac{-1}{2}$$

ومنه $\boxed{S=\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[}$

التمرين الثاني:

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$

مميز المعادلة المقترحة هو $\Delta=b^2-4ac=36-40=-4$

بما أن $\Delta \prec 0$ فان المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{6-2i}{2}=3-i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{6+2i}{2}=3+i$$

ومنه $\boxed{S=\{3-i;3+i\}}$

2) تحديد الشكل المثلثي لكل من العددين a و b

لدينا $a=3+3i$ و $|a|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

إذن :

$$a=3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}+i\frac{3}{3\sqrt{2}}\right)$$
$$=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\boxed{a=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

تذكير :إذا كان $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ فان $\overline{z}=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

لدينا $b=\overline{a}$

إذن :

$$\boxed{b=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

ب- لنبين أن لحق النقطة B' هو 6

لدينا B' صورة B بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$

إذن : $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OA}$ إذن: $b'-b=a$ أي : $b'=a+b=6$

ومنه: $\boxed{b'=6}$

ج- لنبين أن: $\frac{b-b'}{a-b'}=i$

نعلم أن: $a=3+3i$ و $b=3-3i$ و $b'=6$

إذن:

$$\frac{b-b'}{a-b'}=\frac{-3-3i}{-3+3i}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

__طريقة أخرى:__ نعلم أن $i^2=-1$

إذن:

$$\frac{b-b'}{a-b'}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{-i^2+i}{1-i}=\frac{i(1-i)}{1-i}=i$$

استنتاج:

لدينا : $$\frac{b-b'}{a-b'}=i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

إذن: $$\arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ و } \left|\frac{b-b'}{a-a'}\right|=1$$

إذن: $$\overline{\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'B}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ و } \frac{BB'}{AB'}=1$$

أي أن: $$\overline{\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'B}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ و } BB'=AB'$$

ومنه $AB'B$ مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في B'

د- استنتاج أن $OAB'B$ مربع

لدينا $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OA}$ اذن $OAB'B$ متوازي الأضلاع

و بما أن: ABB' مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في B فإن: $OAB'B$ مربع

($OAB'B$ متوازي الأضلاع يتوفر على زاوية قائمة و ضلعين متتابعين متقايسين)

التمرين الثالث:

(u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي : $$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{1+15u_n} \quad ; \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) أ- لنتحقق من أن: $u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{6u_n}{1+15u_n}-\frac{1}{3}=\frac{18u_n-1-15u_n}{3(1+15u_n)}=\frac{3u_n-1}{3(1+15u_n)}$$

$$=\frac{3\left(u_n-\frac{1}{3}\right)}{3(1+15u_n)}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}$$

وبالتالي : $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \qquad u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}}$$

ب- لنبين بالترجع أن: $u_n\succ\dfrac{1}{3} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا $u_0\succ\dfrac{1}{3}$ لأن $u_0=1$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفترض أن $u_n\succ\dfrac{1}{3}$ صحيحة لكل n من $\mathbb{N}$ و لنبين أن $u_{n+1}\succ\dfrac{1}{3}$ صحيحة

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

لدينا : $$u_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{u_n-\frac{1}{3}}{15\,u_n+1}$$

ولدينا حسب الفرضية أن $u_n \succ \frac{1}{3}$ إذن $u_n-\frac{1}{3}\succ 0$ و $15\,u_n+1\succ 0$

ومنه $u_{n+1}-\frac{1}{3}\succ 0$ أي أن $u_{n+1}\succ\frac{1}{3}$

وبالتالي : $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\qquad u_n\succ\frac{1}{3}}$$

2) لنبين أن (v_n) متتالية هندسية لأساسها $\frac{1}{6}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

لدينا $v_n=1-\frac{1}{3u_n}$ و $u_{n+1}=\frac{6u_n}{1+15u_n}$

إذن
$$v_{n+1}=1-\frac{1}{3u_{n+1}}=1-\frac{1}{3\times\frac{6u_n}{1+15u_n}}$$
$$=1-\frac{1}{\frac{18u_n}{1+15u_n}}=1-\frac{1+15u_n}{18u_n}$$
$$=1-\frac{1}{18u_n}-\frac{15u_n}{18u_n}=1-\frac{1}{18u_n}-\frac{5}{6}$$
$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{18u_n}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{3u_n}\right)=\frac{1}{6}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{6}$

- كتابة (v_n) بدلالة n

لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{6}$ وحدها الأول $v_0=1-\frac{1}{3u_0}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

اذن $$v_n=v_0\times q^n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

وبالتالي : $$\forall n\in\mathbb{N}\qquad v_n=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

3) لنبين أن: $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \dfrac{1}{3-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

نعلم أن $v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$ إذن $\dfrac{1}{3u_n} = 1 - v_n$

إذن $u_n = \dfrac{1}{3\left(1-v_n\right)}$ أي أن $u_n = \dfrac{1}{3-3v_n}$

ونعلم أن $v_n = \dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ إذن $u_n = \dfrac{1}{3-3\times\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n} = \dfrac{1}{3-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}$

وبالتالي: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \dfrac{1}{3-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}}$

- استنتاج نهاية المتتالية $\left(u_n\right)$

لدينا $-1 \prec \dfrac{1}{6} \prec 1$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n} = \dfrac{1}{3}$

التمرين الرابع:

الدالة g معرفة على المجال $I = \left]0;+\infty\right[$ بمايلي $g\left(x\right) = x - 1 + \ln x$

1) أ- لنبين أن: $g'\left(x\right) = \dfrac{x+1}{x} \qquad \forall x \in I$

ليكن x عنصرا من I

$$g'\left(x\right) = \left(x-1\right)' + \left(\ln x\right)' = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

ب- لنبين أن g تزايدية على I

ليكن x عنصرا من I إذن $x \succ 0$

لدينا $g'\left(x\right) = \dfrac{x+1}{x}$ و $\dfrac{x+1}{x} \succ 0$

اذن $g'\left(x\right) \succ 0$ وبالتالي g تزايدية على I

2) استنتاج أن $g(x) \geq 0$ على $[1;+\infty[$ وأن $g(x) \leq 0$ على $]0;1]$

- على المجال $[1;+\infty[$ لدينا $x \geq 0$

وبما أن g تزايدية على $[1;+\infty[$ فان $g(x) \geq g(0)$ أي أن $g(x) \geq 0$

وبالتالي $g(x) \geq 0$ على $[1;+\infty[$

- على المجال $]0;1]$ لدينا $x \leq 0$

وبما أن g تزايدية على $]0;1]$ فان $g(x) \leq g(0)$ أي أن $g(x) \leq 0$

وبالتالي $g(x) \leq 0$ على $]0;1]$

II - الدالة f معرفة على المجال I بمايلي : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$

1) أ- لنبين أن $\lim\limits_{\substack{n \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{\substack{n \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{n \to 0 \\ >}} \left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$

__التأويل الهندسي:__ المنحنى (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

لنبين أن $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$

ب- لنبين أن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x}{x} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x} = 0$$

لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1$

__ج- استنتاج :__

لدينا $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

إذن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

2) أ- لنبين أن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2} \qquad \forall x\in I$

ليكن x عنصرا من I

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x-1}{x}\right)'\ln x+\left(\frac{x-1}{x}\right)(\ln x)' \\
&= \left(1-\frac{1}{x}\right)'\ln x+\left(\frac{x-1}{x}\right)\times\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x^2}\ln x+\frac{x-1}{x^2} \\
&= \frac{x-1+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}
\end{aligned}
$$

وبالتالي : $\boxed{\forall x\in I \qquad f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}}$

ب- لنستنتج أن الدالة f تزايدية على $[1;+\infty[$ وتناقصية على $]0;1]$

ليكن x عنصرا من I لدينا $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

- على المجال $[1;+\infty[$ لدينا $g(x)\geq 0$

  إذن f تزايدية على $[1;+\infty[$

- على المجال $]0;1]$ لدينا $g(x)\leq 0$

  إذن f تنا قصية على $]0;1]$

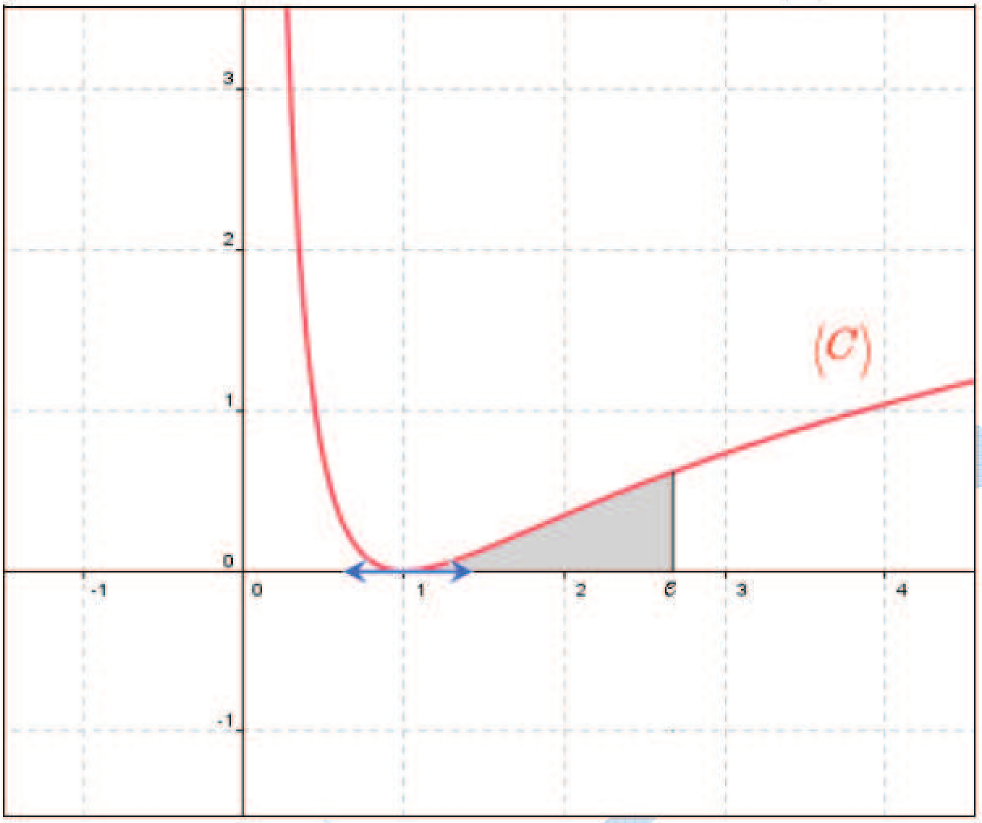
ج- جدول تغيرات الدالة f على I

لدينا f تزايدية على $[1;+\infty[$ و تناقصية على $]0;1]$

إذن جدول تغيرات الدالة f على I هو:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) إنشاء المنحنى (C)



4) أ- لنبين أن : $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال I

لدينا الدالة $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ قابلة للاشتقاق على المجال I (جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I)

ولكل x من المجال I لدينا :

$$H'(x) = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]' = \frac{1}{2}\times 2(\ln x)'\ln x = \frac{1}{x}\times \ln x = \frac{\ln x}{x} = h(x)$$

وبالتالي : $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال I

ب- لنبين أن : $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx = \int_1^e (\ln x)'\ln x\,dx$$

$$= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{1}{2}\left[(\ln e)^2 - (\ln 1)^2\right] = \frac{1}{2}[1-0] = \frac{1}{2}$$

وبالتالي : $\boxed{\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}}$

ج- لنبين باستعمال مكاملة بالأجزاء أن : $\int_1^e \ln x dx = 1$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{x} x\right) dx$$

إذن $= (e \ln e - \ln 1) - \int_1^e 1 dx$

$$= e - [x]_1^e = 1 - (e-1) = 1$$

وبالتالي : $\boxed{\int_1^e \ln x dx = 1}$

5) أ- لنتحقق أن : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} \qquad \forall x \in I$

ليكن x عنصرا من I

لدينا $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln x = \ln x - \frac{1}{x} \times \ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x}$

وبالتالي : $\boxed{\forall x \in I \qquad f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}}$

ب- لنبين أن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ و $x = e$ هي : $0,5\ cm^2$

لدينا f موجبة على المجال $[1;e]$ إذن المساحة المطلوبة هي : $A = \left[\int_1^e f(x) dx\right] ua$

حيث ua وحدة المساحة ولدينا $ua = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 1\,cm \times 1\,cm = 1\,cm^2$

$$A = \left[\int_1^e \left(\ln x - \frac{\ln x}{x}\right) dx\right] ua$$

$$= \left[\int_1^e \left(\ln x - \frac{\ln x}{x}\right) dx\right] ua$$

إذن :
$$= \left[\int_1^e \ln x dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx\right] ua$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 1\ cm^2 = 0,5\,cm^2$$