Exercice 01:

1)- Déterminer en extension l'ensemble suivant :

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \,/\, x^2+xy-2y^2=-5\right\}.$$

2)- Construire dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ l'ensemble suivant :

$$F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\le 0 \Rightarrow x>y\right\}.$$

Exercice 02:

⇨ On considère les ensembles :

$$A=\left\{2k-1 \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}\ ,\ B=\left\{\frac{2k-1}{5} \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}\ \text{et}\ C=\left\{\frac{4-\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}} \,/\, x\in\mathbb{R}^+\right\}.$$

1)- Montrer que : $A\subset B$ et que : $B\not\subset A$.

2)- Montrer que : $C=\left]-1,1\right]$.

Exercice 03:

⇨ On considère l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto -2x+3 \end{array}$.

1)- Déterminer $A=f^{-1}\left(\left]1-r,1+r\right[\right)$ et $B=f\left(\left[0,\frac{3}{2}\right[\right)$, Où $r\in\mathbb{R}^{*+}$.

2)- a)- Déterminer suivant les valeurs du paramètre r les ensembles suivants :

$$A\cap B\ ,\ A\cup B\ \text{et}\ A\Delta B\ .$$

b)- Pour quelles valeurs de r , $A\cup B$ est un intervalle ?

Exercice 04:

⇨ On considère l'ensemble :

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2-x-y\le\frac{1}{4}\right\}.$$

1)- Justifier que : $E\neq\varnothing$.

2)- Montrer que : $E\subset F$ et que : $F\not\subset E$, Où $F=[0,1]^2$.

Exercice 05:

⇨ On considère l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$.

1)- a)- Vérifier que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right), f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$.

b)- l'application f est-elle injective ? justifier votre réponse .

2)- Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),\left|f(x)\right|\le 1$. L'application f est-elle surjective ?

3)- Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1,1]$.

✓ Montrer que g est une bijection de $[-1,1]$ vers lui même et donner sa bijection réciproque g^{-1} .

Exercice 06:

1)- Vérifier que : $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right),\frac{3x-4}{x-1}<3$.

2)- On considère l'application : $\begin{array}{l} f:\left]1,+\infty\right[\to\left]-\infty,3\right[\\ x\mapsto \dfrac{3x-4}{x-1} \end{array}$.

a)- Déterminer $f^{-1}\left(\left[1,\frac{5}{2}\right[\right)$ et $f\left(\left[2,+\infty\right[\right)$.

b)- Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 07:

1)- Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),x-\sqrt{x^2+1}<0$.

2)- On considère l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\left]-\infty,0\right[\\ x\mapsto x-\sqrt{x^2+1} \end{array}$.

✓ Vérifier que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),x+\sqrt{x^2+1}=\frac{-1}{f(x)}$, puis en déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 08:

➩ On considère l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ n\mapsto n+(-1)^n \end{array}$.

✓ Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}), f\circ f(n)=n$, puis en déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 09:

➩ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application tels que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}), f\circ f(x)=4x-9 .$$

1)- Calculer $f(3)$.

2)- Montrer que f est injective et surjective , puis en déduire qu'elle est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f .

3)- Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application tels que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}), g\circ g(x)=ax+b \text{ , Où } (a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R} .$$

✓ Montrer que g est une bijection et donner sa bijection réciproque g^{-1}, puis Calculer $g\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ lorsque $a\neq 1$.

Exercice 10:

➩ On considère l'application : $\begin{array}{l} f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*\to\mathbb{N} \\ (x,y)\mapsto x+\dfrac{1}{y} \end{array}$.

1)- a)- Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ l'équation : $f(x,y)=\dfrac{2}{3}$.

b)- L'application f est-elle surjective ? justifier votre réponse .

2)- Montrer que f est injective .

Exercice 11:

➩ On considère l'application : $\begin{array}{l} f:\mathrm{P}(E)\to\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B) \\ X\mapsto(A\cap X,B\cap X) \end{array}$.

Où A et B sont deux parties d'un ensemble non vide E .

1)- Montrer que : f *est injective* $\Leftrightarrow A\cup B=E$.

2)- Montrer que : f *est surjective* $\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

3)- A quelle condition f est-elle bijective ? expliciter alors f^{-1}.

Exercice 12:

➩ Soient f et g deux applications définies $\mathbb{R}^2$ de vers $\mathbb{R}^2$ tels que :

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2), f(x,y)=(x+y,3x+2y) \; et \; g(x,y)=(|x|+y,3|x|+2y).$$

1)- Montrer que f est bijective et donner sa bijection réciproque f^{-1}.

2)- Montrer que g n'est ni injective ni surjective .

Exercice 13:

1)- Montrer que : $(\forall x\in[0,1]), 0\leq\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}\leq 1.$

2)- On considère l'application : $\begin{array}{l} f:[0,1]\to[0,1] \\ x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} \end{array}$.

✓ Montrer que f est bijective et expliciter f^{-1} sa bijection réciproque .

Exercice 14:

➩ Soit $f:E\to E$ une application tels que : $f\circ f\circ f=f$.

✓ Montrer que : f *est injective* $\Leftrightarrow f$ *est surjective* .

Fin Du Sujet .