الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

أهداف الدرس

- استعمال خاصيات الترتيب.
- التعرف على المجالات المحدودة و المجالات غير المحدودة.
- استعمال تقنيات تأطير عدد.
- التعرف على القيمة المطلقة و ربطها بالمسافة .
- التعرف على مركز و شعاع مجال .
- توظيف المحسبة في تحديد قيم مقربة لعدد.

القدرات المنتظرة

- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين أو تعبيرين و استعمال المناسب منها حسب الوضعية المدروسة.
- تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم
- إدراك و تحديد تقريب عدد أو تعبير بدقة معلومة.
- إنجاز إكبارات أو إصغارات لتعابير جبرية.
- استعمال المحسبة لتحديد قيم مقربة لعدد حقيقي.

فقرات الدرس

- الترتيب و العمليات
- المحالات و التأطير
- القيمة المطلقة و خاصياته

I)-الترتيب و العمليات

تعاريف

ليكن a و b عددين حقيقيين .

➢ نقول إن $a \le b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$.	➢ نقول إن $a < b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^{+*}$.
➢ نقول إن $a \ge b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$.	➢ نقول إن $a > b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^{+*}$.

ملحوظة

- ➢ $a \le b$ يكافئ $a < b$ أو $a = b$.
- ➢ إذا كان $a < b$ فإن $a \le b$.(العكس غير صحيح)

أمثلة

قارن العددين a و b في الحالات التالية: $\begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = 2 \end{cases}$ و $\begin{cases} a = 2 + \sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases}$ و $\begin{cases} a = \sqrt{6} \\ b = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1 \end{cases}$.

خاصيات

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

➢ إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ b \le c \end{cases}$ فإن $a \le c$.	➢ إذا كان $c > 0$ فإن: $a \le b$ يعني $ac \le bc$. ➢ إذا كان $c < 0$ فإن: $a \le b$ يعني $ac \ge bc$.
➢ إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ b < c \end{cases}$ فإن $a < c$.	➢ إذا كان $\begin{cases} 0 \le a \le b \\ 0 \le c \le d \end{cases}$ فإن $0 \le ac \le bd$.
➢ $a \le b$ يكافئ $a + c \le b + c$.	➢ ليكن $a \ge 0$ و $b \ge 0$. $a \le b$ يكافئ $a^2 \le b^2$ و $a \le b$ يكافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$
➢ إذا كان $\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases}$ فإن $a + c \le b + d$.	➢ ليكن $a \le 0$ و $b \le 0$ $a \le b$ يكافئ $a^2 \ge b^2$
➢ $a \le b$ يكافئ $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$ حيث: $ab > 0$.	➢ لكل a من $\mathbb{R}$ ، $a^2 \ge 0$.

ملاحظات

➢ إذا كان $a \ge 0$ و $b \ge 0$ فإن $\begin{cases} a + b \ge 0 \\ ab \ge 0 \end{cases}$.	➢ إذا كان $a \le 0$ و $b \le 0$ فإن $\begin{cases} a + b \le 0 \\ ab \ge 0 \end{cases}$.

تمرين01

1) - ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}^{+*}$.

نضع: $x = \frac{7a + 2b}{7a}$ و $y = \frac{8b}{7a + 2b}$. قارن العددين x و y .

2) - قارن العددين x و $a = 2\sqrt{x} - 1$ حيث $x \in \mathbb{R}^+$.

ملاحظة

لمقارنة كسر موجب $\frac{a}{b}$ مع العدد 1 ، نقارن بسطه مع مقامه .

مثال

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث: $\frac{-1}{2} < b < a$.

1) - أثبت أن $2a+1>0$ و $2b+1>0$.

2) - استنتج مقارنة الأعداد التالية : 1 و $\frac{2a+1}{2b+1}$ و $\frac{2b+1}{2a+1}$.

II)-المجالات و التأطير

1)-المجالات

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a<b$.

- **المجالات المحدودة**

المجالات التالية هي مجالات محدودة و تكتب بالإدراك كما يلي:

$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}/\ a\le x\le b\}$	$]a,b]=\{x\in\mathbb{R}/\ a<x\le b\}$
$[a,b[=\{x\in\mathbb{R}/\ a\le x<b\}$	$]a,b[=\{x\in\mathbb{R}/\ a<x<b\}$

ملحوظة

- نعتبر المجال $I=[0,1[$. لدينا: $1\notin I$, $0\in I$ و $\frac{1}{2}\in I$ و $-1\notin I$ و $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]\subset I$

- **المجالات غير المحدودة**

المجالات التالية هي مجالات غير محدودة و تكتب بالإدراك كما يلي:

$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}/\ x\ge a\}$	$]-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}/\ x\le a\}$
$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}/\ x>a\}$	$]-\infty,a[=\{x\in\mathbb{R}/\ x<a\}$

ملاحظة

- الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعدديين حقيقيين و نقرأهما على التوالي "زائد لانهاية" و "ناقص لانهاية".
- لدينا: $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ و $\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ و $\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$

و $\mathbb{R}^-=]-\infty,0]$ و $\mathbb{R}_-^*=]-\infty,0[$.

2)-تأطير عدد حقيقي

تعريف

- تأطير عدد حقيقي x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a<b$ بحيث:

$a\le x\le b$ أو $a\le x<b$ أو $a<x\le b$ أو $a<x<b$.

- العدد الحقيقي الموجب قطعا $b-a$ يسمى سعة التأطير و العددان a و b يسميان محدات التأطير.

تمرين02

1) - تحقق من أن: $14^2<200<15^2$ ثم استنتج أن: $1,4<\sqrt{2}<1,5$.

2) – أ- بنفس الطريقة أوجد تأطيرا للعدد $\sqrt{5}$.

ب- استنتج تأطيرا لكل من العددين $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$ ثم حدد سعته.

تمرين03

ليكن x عنصرا من المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$ و $A=\frac{x}{x+2}$.

1) - حدد تأطيرا للعدد $x+2$ ثم استنتج تأطيرا للعدد A محددا سعته.

2) - تحقق من أن: $A=1-\frac{2}{x+2}$ ثم حدد تأطيرا للعدد A سعته $\frac{2}{15}$.

III)-القيمة المطلقة و خاصياتها

1)-القيمة المطلقة لعدد حقيقي

تعريف

القيمة المطلقة لعدد حقيقي x هي: $|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x \leq 0 \end{cases}$

أمثلة

$|2| = 2$, $|0| = 0$, $\left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $|1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$, $|3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$.

ملاحظة

➢ إذا كانت $M(x)$ نقطة من المستقيم العددي فإن: $OM = |x|$

2)خاصيات القيمة المطلقة لعدد حقيقي

لكل عددين حقيقيين x و y ، لدينا:

➢ $|x| \geq 0$ ، لكل x من $\mathbb{R}$	➢ $|x^2| = |x|^2 = x^2$ ، لكل x من $\mathbb{R}$.
➢ $|-x| = |x|$	➢ $\sqrt{x^2} = |x|$
➢ $|x| = 0$ يكافئ $x = 0$	➢ $|xy| = |x|.|y|$
➢ $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$	
➢ $|x+y| \leq |x| + |y|$ (المتفاوتة المثلثية)	➢ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ مع $y \neq 0$

ملاحظة

➢ على المستقيم العددي إذا كانت $M(x)$ و $M'(-x)$ فإن: $OM = OM'$.

➢ $-|x| \leq x \leq |x|$ ، لكل x من $\mathbb{R}$

3)-المسافة و القيمة المطلقة

تعريف

ليكن x و y عددين حقيقيين.
المسافة بين العددين x و y هي العدد الحقيقي الموجب $|x-y|$

خاصية

➢ $|x| \leq r$ يكافئ $-r \leq x \leq r$	➢ $|x| \geq r$ يكافئ $x \geq r$ أو $x \leq -r$
➢ $|x| < r$ يكافئ $-r < x < r$	➢ $|x| > r$ يكافئ $x > r$ أو $x < -r$

استنتاج و مفردات

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث: $a < b$.

➢ العدد الحقيقي الموجب $|b-a| = b-a$ يسمى طول أو سعة المجال $[a,b]$.

➢ $x \in [a,b]$ يكافئ $|x-c| \leq r$ يكافئ $c-r \leq x \leq c+r$.

➢ المجال $[x_0 - r, x_0 + r]$ هو مجال مركزه x_0 و شعاعه r .

➢ العدد الحقيقي الموجب $r = \frac{b-a}{2}$ يسمى شعاع المجال $[a,b]$.

➢ العدد الحقيقي $c = \frac{a+b}{2}$ يسمى مركز المجال $[a,b]$.

تمرين04

أطر العدد الحقيقي x في الحالات:

أ)- $|x+3| \leq 2$ ب)- $\left|x+\frac{1}{3}\right| \geq \frac{1}{2}$ ج)- $\frac{1}{2} \leq \left|x-\frac{1}{2}\right| \prec 2$

تمرين05

ليكن $x \in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ و $y \in]-\infty,1]$ بحيث: $x-y=3$.

1)- أطر كل من العددين الحقيقيين x و y .

2)- بسط كل من $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$ و $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

4)- التقريبات – التقريبات العشرية

➢ التقريبات

تعاريف

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$ و r عددا حقيقيا موجبا قطعا.

- ➢ إذا كان $a \leq x \leq a+r$ ، نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بتفريط.
- ➢ إذا كان $a-r \leq x \leq a$ ، نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بإفراط.
- ➢ إذا كان $|x-a| \leq r$ ، نقول إن a قيمة مقربة (أو تقريب) للعدد x بالدقة r.

خاصية

إذا كان $a \leq x \leq b$ تأطيرا للعدد x فإن:

- ➢ العدد a قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بتفريط.
- ➢ العدد b قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بإفراط.
- ➢ العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.

مثال

من التأطير $2.645 \leq \sqrt{7} \leq 2.646$ نستنتج أن:

- العدد 2.645 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.
- العدد 2.646 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.
- العدد $\frac{2.645+2.646}{2}=2.6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة $\frac{2.646-2.645}{2}=5.10^{-4}$.

➢ التقريب العشري لعدد حقيقي

الجزء الصحيح لعدد عشري

لكل عدد حقيقي x ، يوجد عدد صحيح نسبي p بحيث: $p \leq x < p+1$

➢ العدد p يسمى الجزء الصحيح ل x ونكتب $E(x)=p$ أو $[x]=p$

مثال

- لدينا: $1 \le \sqrt{2} < 2$ ومنه: $E\left(\sqrt{2}\right) = 1$.
- لدينا: $-2 \le -\sqrt{3} < -1$ إذن $E\left(-\sqrt{3}\right) = -2$

تعاريف

ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ و $p \in \mathbb{Z}$ بحيث $E\left(10^n x\right) = p$.

لدينا: $p \le 10^n x < p+1$ إذن $10^{-n} p \le x < 10^{-n}(p+1)$.

- العدد العشري $p.10^{-n}$ يسمى التقريب العشري للعدد x بالدقة 10^{-n} (أو من الرتبة n) بتفريط.
- العدد العشري $(p+1).10^{-n}$ يسمى التقريب العشري للعدد x بالدقة 10^{-n} (أو من الرتبة n) بإفراط

مثال1

لدينا: $1.732 \le \sqrt{3} < 1.733$ أي $(1732)10^{-3} \le \sqrt{3} < (1732+1)10^{-3}$.

- $(1732)10^{-3} = 1.732$ تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.
- $(1732+1)10^{-3} = 1.733$ تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

مثال2

باستعمال المحسبة أوجد تأطيرا للعدد $\sqrt{2}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط ثم بإفراط.

تمرين06 (61 ص. 68)

نعتبر العددين الحقيقيين A و B بحيث: $A = \sqrt{x^2+1} - |x|$ و $B = \sqrt{x^2+1} + |x|$.

1) - بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ ، $A > 0$ ثم استنتج أن: $B > 2|x|$.

2) – أحسب الجداء AB ثم استنتج أن: $A < \frac{1}{2|x|}$ ، لكل x من $\mathbb{R}^*$.

3) –أ- استنتج أن: $|x| < \sqrt{1+x^2} < |x| + \frac{1}{2|x|}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

ب- أعط تأطيرا للعدد $\frac{\sqrt{122}}{3}$ سعته $\frac{1}{66}$.

تمرين07

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$ بحيث: $x + 2y = \frac{1}{2}$.

- بين أن: $x^2 + y^2 \ge \frac{1}{20}$.

تمرين08

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا.

نعتبر الأعداد الحقيقية التالية: $m_1 = \frac{2ab}{a+b}$ و $m_2 = \sqrt{ab}$ و $m_3 = \frac{a+b}{2}$ و $m_4 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

- بين أن: $m_1 \le m_2 \le m_3 \le m_4$.

هذه الأعداد تسمى على التوالي: المعدل التوافقي و الهندسي و الحسابي و التربيعي للعددين a و b .