تمارين محلولة في الأعداد العقدية

عبد المالك اعكوبي
2بك ف.ك

تمرين رقم 1)

المستوى $\wp$ منسوب لمعلم م. م. $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$

1) نعتبر المعادلة $z^3-8z^2+24z-32=0$ **(E)**

أ- تأكد أن $z_0=4$ حل للمعادلة **(E)**

ب - حدد الأعداد a و b و c بحيث $(E)\Leftrightarrow(z-4)(az^2+bz+c)=0$

ج- حل المعادلة **(E)** (نضع $\operatorname{Im}(z_1)\succ 0$)

د- اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي

ذ – بين أن النقط **A** (z_0) و $B(z_1)$ و $C(z_2)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $\Omega(\omega=2)$ وشعاعها **r=2** .

2) لتكن 'B صورة B بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{6}$ حدد لحق 'B.

حل التمرين رقم 1)

1) ا-

ب- **a=1** و **b=-4** و **c=8**

ج- $z_0=4$ و $z_1=2+2i$ و $z_2=2-2i$

د- $z_1=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ذ- $|z_0-2|=|z_1-2|=|z_2-2|=2$ إذن $\Omega A=\Omega B=\Omega C=2$

2) $z_1'-\omega=e^{i\frac{\pi}{6}}(z_1-\omega)$ إذن $z_1'=e^{i\frac{\pi}{6}}(z_1-\omega)+\omega=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$

تمرين رقم 2)

نضع $j=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

1) اوجد الشكل المثلثي ل **j**

2) بين أن $j^{3}=1$

3) بين أن $1+j+j^{2}=0$

4) بين أن $j^{2}=-e^{i\frac{\pi}{3}}$

حل التمرين رقم 2)

1) $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) $j^{3}=(e^{i\frac{2\pi}{3}})^{3}=e^{i2\pi}=1$

3) $1+j+j^{2}=\dfrac{1-j^{3}}{1-j}.1=0$

4) $j^{2}=(e^{i\frac{2\pi}{3}})^{2}=e^{i\frac{4\pi}{3}}=-e^{i\frac{\pi}{3}}$

تمرين رقم 3)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^{2}-8z+17=0$

2) نعتبر في المستوى P النقطتين $A(a=4+i)$ و $B(b=8+3i)$

ليكن z لحق نقطة M و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه النقطة $\Omega(\omega=1+2i)$ وزاويته هي $\frac{3\pi}{2}$

ا-بين أن $z'=-iz-1+3i$

ب- تحقق أن لحق النقطة C صورة A بالدوران R هو $c=-i$

ج- بين أن $b-c=2(a-c)$ ثم استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية .

حل التمرين رقم 3)

1) $\Delta'=i^{2}$ و $\boxed{s=\{4-i;4+i\}}$

2) ا- $M'(z')$ صورة $M(z)$ ب R إذن $z'-\omega=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-\omega)$

أي $z'=-i(z-\omega)+\omega$ ومنه $\boxed{z'=-iz-1+3i}$

www.mathyoussef.ning.com

ب- $\boxed{c=-i(4+i)-1+3i=-i}$

ج- $b-c=2(a-c)$ إذن $\frac{b-c}{a-c}=2\in\mathbb{R}$ إذن النقط A و BوC مستقيمية .

تمرين رقم 4)

1)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+34=0$

2) نعتبر النقط $A(a=3+5i)$ $B(b=3-5i)$ $C(c=7+3i)$

ليكن z لحق M و z' لحق M' صورة M بالإزاحة T التي متجهتها $\vec{u}$ التي لحقها $4-2i$

أ- بين أن $z'=z+4-2i$ ثم تحقق أن النقطة C هي صورة A بالإزاحة T

ب- بين أن $\frac{b-c}{a-c}=2i$

ج- استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية وان $BC=2AC$.

حل التمرين رقم 4)

1) $\Delta=-25=(5i)^2$ و $S=\{3-5i;3+5i\}$

2) $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow z'-z=4-2i\Leftrightarrow z'=z+4-2i$

ا- $a+4-2i=3+5i+4-2i=7+3i=c$ إذن $\boxed{C=T(A)}$

ب- $\frac{b-c}{a-c}=..=2i$

ج- $\arg(\frac{b-c}{a-c})\equiv\arg(2i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن ABC قائم الزاوية في C

و $\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=|2i|=2$ إذن $\boxed{BC=2AC}$.

تمرين رقم 5)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+25=0$

2) نعتبر النقط $A(a=3+4i)$ $B(b=3-4i)$ $C(c=2+3i)$ $D(d=5+6i)$

ا- احسب $\frac{d-c}{a-c}$ ثم استنتج أن النقط **A** و **C** و **D** مستقيمية

ب- بين أن $p=3+8i$ هو لحق النقطة **P** صورة **A** بالتحاكي الذي مركزه **B** ونسبته $\frac{3}{2}$

ج- اكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{d-p}{a-p}$ ثم استنتج أن $\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PD}}\right)$ وان $PA=\sqrt{2}PD$.

حل التمرين رقم 5)

1) $\Delta'=-16=(4i)^2$ و $S=\{3-4i;3+4i\}$

2) ا- $\frac{d-c}{a-c}=3$ إذن النقط **A** و **C** و **D** مستقيمية

ب- $\frac{3}{2}(a-b)=12i=p-b$ إذن $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ أي $H(A)=P$

ج- $\frac{1+i}{2}=\ldots=\frac{d-p}{a-p}$ إذن $\frac{d-p}{a-p}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$

أي $\left(\widehat{\overrightarrow{PA};\overrightarrow{PD}}\right)=\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$$\left|\frac{d-p}{a-p}\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنه $PA=\sqrt{2}PD$.

تمرين رقم 6)

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E)\quad (-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$$

1) أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(1);z^2-2z+2=0$$

ب- حدد الشكل المثلثي لحلي المعادلة (1)

2) استنتج حلول المعادلة (E)

3) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م.م $(O,\vec{U},\vec{V})$

النقط A , B , C التي ألحاقها على التوالي

$z_A=1+i$, $z_B=\overline{z_A}$, $z_C=2z_B$

أ- مثل A ,B و C

ب- بين أن النقط A و B و C تنتمي إلى الدائرة

التي مركزها I التي لحقها 3 و شعاعها $r=\sqrt{5}$

ج- أحسب $\dfrac{z_C-3}{z_A-3}$

د- حدد قياسا للزاوية $\widehat{(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IC})}$ واستنتج طبيعة المثلث IAC

4) ا- لتكن E صورة 0 بالإزاحة التي متجهتها $2\overrightarrow{IC}$ حدد z_E

ب- حدد التعبير العقدي للدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

حل التمرين رقم 6)

1) ا- $\Delta=-4=(2i)^2$ و $z_1=1-i$ و $z_2=1+i$ $\boxed{S=\{1-i;1+i\}}$

ب- $z_1=1-i$ و $z_2=1+i$ إذن $\boxed{z_1=1-i=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]}$

و $\boxed{z_2 = 1+i = \left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]}$

2) حل (E) هو حل المعادلتين $-iz+3i+3=1-i$

$-iz+3i+3=1+i$

وهي $z_3=4-2i$ و $z_4=1-2i$ إذن $\boxed{S=\{z_3;z_4\}}$

3) ا-

$$IA = |z_1-3| = \sqrt{5}$$

$$IB = |z_2-3| = \sqrt{5}$$

ب-

$$IC = |z_3-3| = \sqrt{5}$$

إذن $A\in\xi(I;\sqrt{5})$ و $B\in\xi(I;\sqrt{5})$ و $C\in\xi(I;\sqrt{5})$

ج - $\frac{z_C-3}{z_A-3} = \ldots = i$

د- قياسا للزاوية $\widehat{(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IC})}$ **هو** $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث IAC قائم الزاوية في I.

و بما أن $IA = IC = \sqrt{5}$ **فان IAC قائم الزاوية ومتساوي الساقين.**

4) ا- $t_{2\overrightarrow{IC}}(o)=E \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow z_E = -2-4i$

ب- $M(z)$ و $M'(z')$ **و R الدوران الذي مركزه O وزاويته** $\frac{\pi}{2}$

إذن $\boxed{z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz}$.