ثانوية بئر أنزران . صفرو .
2012/2011 (الدّورة 2)

مسألة مع إشارات حلولها

الثّانية بكلوريا علوم فيزيائية 1
ذ: توفيق بنعمرو

تعريف: الجيب الهذلولي $\forall x\in\mathbb{R}: sh(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ وجيب تمام الهذلولي: $\forall x\in\mathbb{R}: ch(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

الجزء الأول:

1) تحقّق أنّ: أ) الدالة ch زوجية و الدالة sh فردية.

ب) $\forall x\in\mathbb{R}:\ ch^{2}(x)-sh^{2}(x)=1$.

ج) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^{2}:\ sh(x-y)=sh(x)ch(y)-sh(y)ch(x)$.

2) أدرس تغيّرات الدالة sh و فروعها اللاّنهائية و ضع جدول التغيرات ثم أنشئ منحناها في معلم م م.

3) استنتج أنّ الدالة sh تقبل دالة عكسية من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ و حدّد دالتها العكسية.

الجزء الثّاني: نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=\begin{cases}\ln(ch(x)) & x\geq 0\\ \ln(\dfrac{-2x}{x^{2}+1}) & x<0\end{cases}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ و أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة؛ هل f متّصلة في 0 ؟ علّل جوابك.

2) أحسب: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ثمّ أعط تأويلاً هندسياً للنّتيجة.

3) أحسب: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و بيّن أنّ المستقيم $y=x-\ln 2$ مقارب مائل ل C_f جوار $+\infty$.

4) بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 ثمّ حدّد معادلة نصف المماس في 0.

5) بيّن أنّ: $\forall x>0:\ f^{/}(x)=\dfrac{sh(x)}{ch(x)}$ و أحسب $f^{/}(x)$ من أجل $x<0$.

6) أدرس تغيرات f و ضع جدولها ثمّ أنشئ C_f في م م م معطيات: الوحدة $2cm$ و $\ln 2\approx 0,7$ و $A(-2;-0,3)$ نقطة انعطاف.

7) لتكن g قصور f على $]-\infty,-1]$. تحقّق أنّ g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرّفة على مجالٍ J يتم تحديده ثم حدّد $g^{-1}(x)$.

8) h قصور f على $\mathbb{R}^{+}$ ، حدّد $h(\mathbb{R}^{+})$ ثمّ حدّد: $h^{-1}(\ln(\dfrac{5}{4}))$ و $(h^{-1})^{/}(\ln(\dfrac{5}{4}))$.

الجزء 1: **1)** أ) $\mathbb{R}$ هي مجموعة تعريف الدالتين ch و sh إذن متماثلة بالنّسبة ل 0.

$$\forall x\in\mathbb{R}: sh(-x)=\frac{e^{(-x)}-e^{(x)}}{2}=-\frac{e^{(x)}-e^{(-x)}}{2}=-sh(x) \text{ و } ch(-x)=\frac{e^{(-x)}+e^{(x)}}{2}=ch(x)$$

ب) $ch^{2}(x)-sh^{2}(x)=\dfrac{e^{2x}+2e^{x}e^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^{x}e^{-x}-e^{-2x}}{4}=\dfrac{2e^{0}+2e^{0}}{4}=1$.

ج)

$$sh(x)ch(y)-ch(x)sh(x)=\frac{(e^{x}-e^{-x})(e^{y}+e^{-y})-(e^{x}+e^{-x})(e^{y}-e^{-y})}{4}$$

$$sh(x)ch(y)-ch(x)sh(x)=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}-e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}=\frac{2e^{x-y}-2e^{-x+y}}{4}=\frac{e^{(x-y)}-e^{-(x-y)}}{2}$$

---

2)

$$\forall x\in\mathbb{R}: sh^{/}(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})^{/}=\frac{1}{2}(e^{x}-(-e^{-x}))=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} sh(x)=(\frac{(+\infty)-0}{2})=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to-\infty} sh(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{sh(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{x}}{x}-\frac{1}{xe^{x}})=\frac{1}{2}((+\infty)-0)=+\infty\Rightarrow\lim_{-\infty}\frac{sh(x)}{x}=-\infty$$

فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ و $-\infty$

---

3) sh متصلة وتزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ إذن تقبل دالة عكسية معرّفة على $]\lim_{-\infty}sh(x)\ ,\ \lim_{+\infty}sh(x)[=\mathbb{R}$

$$x\in\mathbb{R}\ ,\ y\in\mathbb{R}:\ sh^{-1}(x)=y\Leftrightarrow x=sh(y)\Leftrightarrow(e^{y})^{2}-2x\cdot(e^{y})-1=0$$

$$\Delta'=x^{2}+1, e^{y_1}=x+\sqrt{x^{2}+1}\ ,\ e^{y_2}=x-\sqrt{x^{2}+1}<0\Rightarrow sh^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$$

الجزء:2

1)

$$\lim_{x\to0-}(\frac{-2x}{x^{2}+1})=0^{+}\Rightarrow\lim_{x\to0-}\ln(\frac{-2x}{x^{2}+1})=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to0-}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\ln(ch(0))=\ln(1)=0=f(0)$$

f متصلة على 0^{+} و غير متصلة في 0.

---

2)

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{-2x}{x^{2}+1})=\lim_{x\to-\infty}(\frac{-2}{x})=0^{+}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(\frac{-2x}{x^{2}+1})=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^{2}+1}{-2x^{2}})\cdot[(\frac{-2x}{x^{2}+1})\cdot\ln(\frac{-2x}{x^{2}+1})]=-\frac{1}{2}\cdot0=0$$

C_f له فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل جوار $-\infty$

---

3)

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2})=\frac{1}{2}((+\infty)+0)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2})=+\infty$$

$$x>0: f(x)=\ln(e^{x}\cdot(1+e^{-2x}))-\ln2=\ln(e^{x})+\ln(1+e^{-2x})-\ln2=x-\ln2+\ln(1+e^{-2x})$$

$$\lim_{+\infty}[f(x)-(x-\ln2)]=\lim_{+\infty}\ln(1+e^{-2x})=\ln(1+0)=\ln(1)=0$$

---

4) ط1)

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(ch(x))}{x}=\lim_{x\to0+}[\frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1}]\cdot\frac{1}{2}(\frac{e^{x}-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{-x})=1\cdot\frac{1}{2}(1-1)=0=f_{d}^{/}(0)\ .$$

ط2)

$$\lim_{0+}ch(x)=1\Rightarrow\lim_{0+}\frac{\ln(ch(x))}{x}=\lim_{0+}(\frac{\ln(ch(x))}{ch(x)-1})\cdot(\frac{ch(x)-1}{x})=1\cdot ch^{/}(0)=1\cdot sh(0)=0$$

---

5)

$$x<0: f^{/}(x)=(\ln(-2x)-\ln(x^{2}+1))^{/}=\frac{-2}{x}-\frac{2x}{x^{2}+1}=\frac{1-x^{2}}{x(x^{2}+1)}=\frac{x^{2}-1}{(-x)\cdot(x^{2}+1)}$$

---

6) لكلّ x من $\mathbb{R}: e^{x}>0$ و $e^{-x}>0$ إذن $\forall x\in\mathbb{R}: ch(x)>0$. و من تغيرات الدالة sh (الجزء1): $\forall x>0: sh(x)>0$

و منه: $\forall x>0 : f'(x)>0$. من أجْل $x<0$ إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^2-1 .

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|0$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; 0$	$\nearrow$	$+\infty$

بالتوفيق

---

7) g متصلة وتزايدية قطعاً على $]-\infty,-1]$ ، إذن g^{-1} معرّفة على $J=f(]-\infty,-1])=]-\infty,0$

$$x\in\mathbb{R}^-, y\in]-\infty,-1]: g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=\ln(\frac{-2y}{y^2+1}) \Leftrightarrow e^x\cdot(y)^2+2\cdot(y)+e^x=0$$

$$\Delta'=1-e^{2x}>0 : y_1=\frac{-1-\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x} \;,\; y_2=\frac{-1+\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}\geq -1 \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{-1-\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x}$$

---

8) h متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^+$ ، إذن $h(\mathbb{R}^+)=[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=\mathbb{R}^+$.

$$x\in\mathbb{R}^+ : x=(h^{-1})(\ln(\frac{5}{4})) \Leftrightarrow h(x)=\ln(\frac{5}{4}) \Leftrightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow 2(e^x)^2-5(e^x)+2=0$$

$$\Delta=9 : e^{x_1}=2 \;,\; e^{x_2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x_1=\ln(2) \;,\; x_2=\ln(\frac{1}{2})<0 \Rightarrow (h^{-1})(\ln(\frac{5}{4}))=\ln(2)$$

$$h'(\ln(2))=\frac{sh(\ln(2))}{ch(\ln(2))}=\frac{3}{5} \Rightarrow (h^{-1})'(\ln(\frac{5}{4}))=\frac{1}{h'(h^{-1}(\ln(5/4)))}=\frac{1}{h'(\ln(2))}=\frac{5}{3}$$