تقديـــم : ذ. الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

==

التمرين الأول :

1.نبين أن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$:

لدينا :
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(4,0,-3) \\ \overrightarrow{AC}(8,1,-6) \end{cases}$$

إذن :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} + 4\vec{k}$$

ومنه : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$.

استنتاج :

نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل $3x + 4z + d = 0$ حيث d عدد حقيقي .

وحيث أن B نقطة من المستوى (ABC) فإن $3 \times 3 + d = 0$ أي أن : $d = -9$.

ومنه $3x + 4z - 9 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

2. نبين أن مركز الفلكة (S) هو $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها هو 5 .

لدينا $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

يكافئ : $(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + z^2 - 15 = 0$

يكافئ : $(x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$

ومنه : مركز الفلكة (S) هو $\Omega(3,1,0)$ وشعاعها هو 5 .

3.أ. تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) :

المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) و المتجهة $\vec{n}(3,0,4)$ منظمية على المستوى (ABC) .

إذن $\vec{n}(3,0,4)$ موجهة للمستقيم (Δ)

وعليه فإن المستقيم (Δ) مار من $\Omega(3,1,0)$ و موجه بالمتجهة $\vec{n}(3,0,4)$.

ومنه : النظمة $(t \in R)$
$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases}$$
تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

3.ب. نبين أن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة في النقطتين E و F :

wadiiifi@hotmail.com

بما أن المستقيم (Δ) يمر من مركز الفلكة فإنه يخترقها في نقطتين .

وحيث أن E و F تحققان معادلة الفلكة فهما تنتميان إليها .

وحيث أن E و F تنتميان إلى المستقيم (Δ) (من اجل القيمتين 1 و (-1) للبارامتر t)

فالنقطتان مشتركتان بين المستقيم والفلكة

وعليه فإن المستقيم (Δ) يقطع الفلكة في النقطتين E و F

ملاحظة : يمكن حل النظمة المكونة من معادلة الفلكة وتمثيل بارامتري للمستقيم .

التمرين 2 :

1.حل المعادلة المقترحة :

مميز المعادلة هو $\Delta = -4$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين و هما $3+i$ و $3-i$.

2.أ. بين أن $z' = iz + 2 - 4i$:

لدينا : $R(M) = M'$ يكافئ $z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$

يكافئ $z' = i(z-3+i)+3-i$

ومنه : $z' = iz + 2 - 4i$

2.ب. نحدد لحق صورة C بالدوران :

لدينا $R(C) = C'$ إذن : $c' = i(7-3i)+2-4i$

وبالتالي : $c' = 5+3i$ هو لحق صورة C بالدوران R .

2.ج. نبين أن $\dfrac{c'-b}{c-b} = \dfrac{1}{2}i$:

لدينا :

$$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i} = \frac{2+2i}{4-4i} = \frac{1}{2}\frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2}i$$

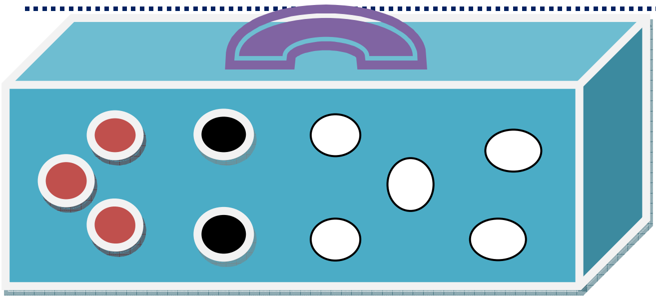
استنتاج :

لدينا $\dfrac{c'-b}{c-b} = \dfrac{1}{2}i$ و $\dfrac{1}{2}i = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

إذن : $\left\|\dfrac{c'-b}{c-b}\right\| = \dfrac{1}{2}$ و $\arg\left(\dfrac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

وبالتالي : $\dfrac{BC'}{BC}=\dfrac{1}{2}$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC'}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

ومنه المثلث BCC' قائم الزاوية في B وأن $BC=2BC'$.



التمرين الثالث :

1.نحسب احتمالي الحدثين A و B :

السحب يتم تأنيا .(لايوجد ترتيب)

إذن كل سحبة عبارة عن تأليفة لأربع عناصر من بين 10 .

ومنه $card\,\Omega=C_{10}^{4}=210$.

. وقوع الحدث A يعني سحب كرة حمراء واحدة فقط وثلاثة غير حمراء

ومنه

$$p(A)=\frac{C_3^1C_7^3}{210}$$
$$=\frac{1}{2}$$

. الحدث المضاد $\overline{B}$ للحدث B هو عدم الحصول على أية كرة بيضاء.

ولدينا : $p(\overline{B})=\dfrac{C_5^4}{210}=\dfrac{5}{210}$ و $p(B)=1-p(\overline{B})$

إذن : $p(B)=1-\dfrac{5}{210}=\dfrac{41}{42}$

2.أ. نتحقق من قيم X :

قيمة المتغير X هي عدد الكرات الحمراء المحصل عليها بعد سحب 4 كرات كمشة واحدة من الصندوق .

الصندوق يحتوي على 3 كرات حمراء .

عندما نسحب دفعة واحدة أربع كرات من هذا الصندوق ،يكون عدد الكرات الحمراء التي نحصل عليها إما 0 ، 1 ،2 أو 3 .

ومنه قيم X هي : 0 و 1 و 2 و 3 .

2.ب. نبين أن : $p(X=2)=\dfrac{3}{10}$ و $p(X=0)=\dfrac{1}{6}$:

الحدث$(X=2)$ هوالحصول على كرتين حمراوين و كرتين غير حمراوين :

ومنه : $p(X=2)=\dfrac{C_3^2.C_7^2}{210}=\dfrac{63}{210}=\dfrac{3}{10}$

الحدث $(X=0)$ هو عدم الحصول على أية كرة حمراء

ومنه : $p(X=0)=\dfrac{C_7^4}{210}=\dfrac{35}{210}=\dfrac{1}{6}$

2.ج. نحدد قانون احتمال X :

لدينا : $X(\Omega)=\{0\,;1\,;\,2\,;\,3\}$

سبق وحددنا احتمالات الأحداث $(X=0)$ ، $(X=1)$ وهو الحدث A ثم الحدث $(X=2)$.

الحدث $(X=3)$ يتحقق عندما نسحب 3كرات حمراء وواحدة غير حمراء .

wadiiifi@hotmail.com

ولدينا $p(X=3)=\dfrac{C_3^3C_7^1}{210}=\dfrac{7}{210}$

نلخص النتائج في الجدول التالي :

X_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/6	1/2	3/10	1/30

التمرين الرابع :

1.نبين بالترجع أن $u_n-1\succ 0$ لكل n من N.

. العبارة صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0=2$

. ليكن n من N.

نفترض أن: $u_n-1\succ 0$

لنبين أن : $u_{n+1}-1\succ 0$

لدينا :

$$u_{n+1}-1=\frac{3.u_n-1}{2u_n}-1$$

$$=\frac{u_n-1}{2u_n}$$

وبما أن $u_n-1\succ 0$

فإن $u_n\succ 1$ وبالتالي $2u_n\succ 0$

وعليه فإن $\dfrac{u_n-1}{2u_n}\succ 0$ أي $u_{n+1}-1\succ 0$

ومنه حسب مبدأ الترجع : $u_n-1\succ 0$ لكل n من N.

2.أ. نبين أن المتتالية (v_n) هندسية :

ليكن n من N.

لدينا :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}$$

$$=\frac{\dfrac{3u_n-1}{2u_n}-1}{2.\dfrac{3u_n-1}{2u_n}-1}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{u_n-1}{2u_n-1}$$

$$=\frac{1}{2}v_n$$

wadiiifi@hotmail.com

ومنه : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ لكل n من N.

وعليه فإن المتتالية المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

استنتاج : حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا : $v_n=v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولدينا : $v_0=\frac{u_0-1}{2u_0-1}=\frac{1}{3}$

إذن : $v_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من N.

2.ب. نبين أن $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$:

ليكن n من N.

لدينا :

$$v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}\Rightarrow v_n(2u_n-1)=u_n-1$$
$$\Rightarrow 2v_n.u_n-v_n=u_n-1$$
$$\Rightarrow 2v_n.u_n-u_n=v_n-1$$
$$\Rightarrow u_n.(2v_n-1)=v_n-1$$
$$\Rightarrow u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$$

ومنه : $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$ لكل n من N.

استنتاج :

لدينا $u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$ و $v_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من N

إذن $u_n=\dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

وحيث أن $-1\prec\frac{1}{2}\prec 1$ فإن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

ومنه : $\lim u_n=1$

3.حساب $\lim w_n$:

لدينا $\lim u_n=1$ والدالة $\ln$ متصلة في 1

إذن : $\lim w_n=\ln 1$

wadiiifi@hotmail.com

ومنه : $\lim w_n = 0$

التمرين الخامس :

الجزء الأول : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1.نبين أن : $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من R :

الدالة g قابلة للإشتقاق على R ولكل x من R لدينا :

$$g'(x) = 4e^{2x} + 2\times 4xe^{2x}$$
$$= 4(1+2x)e^{2x}$$

ومنه : $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$ لكل x من R

2. نحدد تغيرات g :

لكل x من R : $e^{2x} \succ 0$

إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $1+2x$

ولدينا : $1+2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

ومنه $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

وعليه فإن : g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

3.أ.نبين أن : $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$:

لدينا

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4\frac{1}{2}e^{-1}$$
$$= 1 - 2e^{-1}$$
$$= 1 - \frac{2}{e}$$

استنتاج : لدينا $2 \prec e$ إذن $\frac{2}{e} \prec 1$ وبالتالي $0 \prec 1 - \frac{2}{e}$

ومنه : $0 \prec g\left(-\frac{1}{2}\right)$

3.ب. نستنتج أن $g(x) \succ 0$ لكل x من R .

ليكن x من R ،

إذا كان $x \geq -\frac{1}{2}$ فإن $g(x) \geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$ لأن g تزايدية على $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

وبالتالي : $g(x) \succ 0$

إذا كان إذا كان $x \leq -\frac{1}{2}$ فإن $g(x) \geq g\left(-\frac{1}{2}\right)$ لأن g تناقصية على $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

wadiiifi@hotmail.com

وبالتالي : $g(x) \succ 0$

ومنه : $g(x) \succ 0$ لكل x من R .

الجزء الثاني :

$$f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$$

1.نحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

.نبين أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$:

لدينا $f(x) = 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1$

نضع $u = 2x$ إذن : $\lim\limits_{x \to \infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{u \to -\infty} ue^{u} = 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} e^{2x} = \lim\limits_{u \to -\infty} e^{u} = 0$

ومنه $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2.بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل x من R :

الدالة f قابلة للإشتقاق على R ولكل x من R لدينا :

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} + 1$$
$$= 1 + 4xe^{2x}$$

ومنه $f'(x) = g(x)$ لكل x من R.

استنتاج : لدينا $f'(x) = g(x)$ لكل x من R و g موجبة قطعا على R .

ومنه f تزايدية قطعا على R .

3.أ.نحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-1}{x} e^{2x} + \frac{x+1}{x} \right)$

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$.

إذن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

استنتاج : بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

فإن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب جوار $(+\infty)$.

3.أ. نحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+1))$:

لدينا :

$$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2xe^{2x} - e^{2x})$$
$$= 0$$

(انظر الجواب على السؤال 1)

استنتاج :

بما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$

wadiiifi@hotmail.com

فإن : المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y = x+1$ مقارب لمنحنى الدالة f جوار $(-\infty)$.

ج. نحدد زوج إحداثيتي نقطة تقاطع (Δ) ومنحنى الدالة f .

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى ،

لدينا :

$$M \in (\Delta)\cap(C) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x+1 \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)e^{2x} = 0 \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 0 \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

ومنه : زوج إحداثيتي نقطة تقاطع (Δ) و (C) هو $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

تحديد الوضع النسبي (Δ) و (C) :

لدينا : $f(x)-(x+1) = (2x-1)e^{2x}$ و $e^{2x} \succ 0$

ومنه إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$ هي إشارة $2x-1$.

إذا كان $x \geq \frac{1}{2}$ فإن $f(x)-(x+1) \geq 0$ ومنه (C) يوجد فوق (Δ) على $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

إذا كان $x \leq \frac{1}{2}$ فإن $f(x)-(x+1) \leq 0$ ومنه (C) يوجد تحت (Δ) على $\left]-\infty , \frac{1}{2}\right]$.

4.أ.بين ان $y = x$ معادلة مماس (C) في أصل المعلم :

معادلة مماس (C) في النقطة التي أفصولها **0** هي : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

ولدينا $f'(0)=1$ و $f(0)=0$.

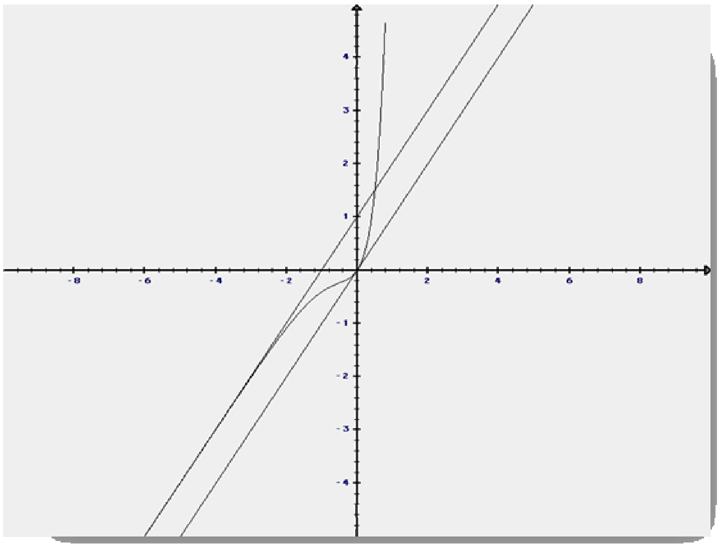
ومنه معادلة مماس (C) في أصل المعلم هي : $y = x$.

الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على R ولدينا لكل x من R : $f''(x) = g'(x)$

وحسب الجزء الأول من التمرين فإن g' أي f'' تنعدم في $\left(\frac{-1}{2}\right)$ وتغير إشارتها بجواره

ومنه النقطة التي أفصولها $\left(\frac{-1}{2}\right)$ تعتبر نقطة انعطاف (C) .

5.إنشاء (Δ) و (C) :



6.أ. نحسب التكامل :

نضع $\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ ولدينا : $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

وبالتالي :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = \left[\frac{2x-1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{e}{2}$$

6.ب.لنحدد مساحة المستوى المحصور بين (C) والمستقيم (T)

بتأطير التعبير $f(x)-x$ حيث $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$ أو بتوظيف دراسة تقعر المنحنى نستنتج أن $f(x)-x \ge 0$

مساحة الحيز المحصور بين (C) و (T) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=\dfrac{1}{2}$ هي :

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)-x|dx \ ua$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} ((2x-1)e^{2x}+1)dx \times 4cm^2$$

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dx\right) \times 4cm^2$$

$$= 4\left(1 - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\right) cm^2$$

$$= (6-2e)cm^2$$

مع متمنياتي لكم بالتوفيق

wadiiifi@hotmail.com