# الأعداد العقدية ( الجزء II )

## أهداف الدرس

| | |
|---|---|
| ➢ التمكن من حل المعادلة $z^2 = a$<br>➢ تعرف معادلة من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية<br>➢ التعرف على الترميز الأسي لعقدي غير منعدم<br>➢ التعرف على صيغتي أولير | ➢ التعرف على صيغة موافر<br>➢ توظيف الترميز الأسي في الحساب المثلثي<br>➢ توظيف صيغتي أولير في الإخطاط<br>➢ توظيف الأعداد العقدية في حل مسائل |

## القدرات المنتظرة

- ➢ حل معادلة من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية
- ➢ إخطاط حدانية مثلثية باستعمال الترميز الأسي
- ➢ التعبير العقدي عن الدوران
- ➢ تطبيق الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية
- ➢ التعرف على الصيغ المثلثية الأساسية باستعمال الأعداد العقدية

## الامتدادات

| | |
|---|---|
| ❖ الحساب التكاملي<br>❖ الكهرباء و الميكانيكا | ❖ الهندسة. |

## فقرات الدرس

- ➢ المعادلة من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية في المجموعة $\mathbb{C}$
- ➢ الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم
- ➢ صيغتا أولير و موافر
- ➢ الكتابة العقدية لدوران

# I)- المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في $\mathbb{C}$

## 1)- المعادلة $z^2 = a$ ،حيث $a \in \mathbb{R}^*$

### خاصية

ليكن $a$ عددا حقيقيا غير منعدم. المعادلة $z^2 = a$ تقبل حلين في $\mathbb{C}$ هما:
- $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ إذا كان $a > 0$
- $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$ إذا كان $a < 0$

### أمثلة

- حلا المعادلة $z^2 = 2$ هما : $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$
- حلا المعادلة $z^2 = -2$ هما : $i\sqrt{2}$ و $-i\sqrt{2}$

### تمرين

- حدد الجذرين المربعين للعدد $a = 4 - 2\sqrt{3}$
- حل في $\mathbb{C}$ $z^2 + \cos^2 t = 0$ ، حيث $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

## 2)- المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a$ و $b$ و $c$ أعدادا حقيقية و $a \in \mathbb{R}^*$

### تعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية في المجموعة $\mathbb{C}$ بمعاملات حقيقية كل معادلة تكتب على الشكل:
$az^2 + bz + c = 0$ حيث $a$ و $b$ و $c$ أعدادا حقيقية و $a \in \mathbb{R}^*$

### خاصية

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a$ و $b$ و $c$ أعدادا حقيقية و $a \in \mathbb{R}^*$
- العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$ ، يسمى مميز المعادلة $az^2 + bz + c = 0$
- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما: $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا حقيقيا مزدوجا هو $z = -\dfrac{b}{2a}$
- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين هما: $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

### أمثلة

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:
- $z^2 - z + 2 = 0$
- $\frac{1}{2}z^2 - 2z + \sqrt{3} = 0$
- $z^2 - 2(\sin t)z + 1 = 0$ حيث $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

### نتائج

إذا كان $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ في المجموعة $\mathbb{C}$ فإن:
- $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ ، لكل $z$ من $\mathbb{C}$.
- $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

### تمرين

لكل $z$ من $\mathbb{C}$،نضع : $P(z) = z^2 - 2z + 2$

1)- أحسب $P(1-i)$

2)- استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

## تمرين

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): z^3+2(\sqrt{3}-1)z^2+4(1-\sqrt{3})z-8=0$

1)-بين أن العدد $2$ حل للمعادلة $(E)$

2)- بين أن $z^3+2(\sqrt{3}-1)z^2+4(1-\sqrt{3})z-8=(z-2)(z^2+2\sqrt{3}z+4)$

2)- أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$

ب- استنتج حلول المعادلة $(E)$ في $\mathbb{C}$

## تمرين

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): z^3+(1-2i)z^2+(1-2i)z-2i=0$

1)-بين أن المعادلة $(E)$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$

2)-حدد الأعداد الحقيقية $a$ و $b$ و $c$ حيث: $z^3+(1-2i)z^2+(1-2i)z-2i=(z-z_0)(az^2+bz+c)$

2)- أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$

ب- حدد شكلا مثلثيا لكل حل من حلول المعادلة $(E)$

# II)- الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم

**Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul**

## تعريف

كل عدد عقدي $z$ غير منعدم،معياره $r$ و $\theta$ عمدة له يكتب على الشكل $z=re^{i\theta}$

هذه الكتابة تسمى ترميزا أسيا أو شكلا أسيا للعدد العقدي $z$ و لدينا: $z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

## أمثلة

- $\sqrt{2}+i\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
- $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $\sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

## خاصية

إذا كان $z=re^{i\theta}$ حيث $r\in\mathbb{R}_+^*$ و $\theta\in\mathbb{R}$ ،فإن $|z|=r$ و $\arg z=\theta[2\pi]$

# III)- الترميز الأسي و العمليات

## خاصية

ليكن $r$ و $r'$ عددين حقيقيين موجبين قطعا و $\theta$ و $\theta'$ عددين حقيقيين،لدينا:

- $\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta}=re^{i(\pi+\theta)}$
- $re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $\forall n\in\mathbb{Z},(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}$

## تمرين

1)- حدد شكلا أسيا للعددين العقديين $z_1=2+2i$ و $z_2=2\sqrt{3}+2i$

2)- استنتج شكلا مثلثيا لكل من $z_1z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$

3)- أحسب $(z_1)^{12}$

## IV)- صيغتا أولير Formule d'Euler

### خاصية

ليكن $\theta$ عددا حقيقيا ، لدينا:

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

### تطبيق : إخطاط $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$

➢ إخطاط : $\cos^3\theta$

لدينا:

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(2\cos 3\theta+6\cos 3\theta\right)$$

و بالتالي

$$\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

➢ إخطاط : $\sin^3\theta$

لدينا:

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\right)^3$$
$$= \frac{-1}{8i}\left(e^{3i\theta}-3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}-e^{-3i\theta}\right)$$
$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right)$$
$$= -\frac{1}{8i}\left(\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)-3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{8i}\left(2i\sin 3\theta-6i\sin 3\theta\right)$$

و بالتالي

$$\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$$

### صفة عامة

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم $n$ و لكل عدد حقيقي $\theta$ ، لدينا

- $\cos^n\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$
- $\sin^n\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$

### ملاحظة

تستعمل صيغتا أولير في الحساب التكاملي لتحديد الدوال الأصلية للدوال من النوع $\sin^n x$ و $\cos^n x$

## V)- صيغة موافر Formule Moivre

### خاصية

ليكن $\theta$ عددا حقيقيا و $n$ عددا صحيحا طبيعيا لدينا:

- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ و تكتب أيضا • $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

### تطبيق : تحويل $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$

➢ تحويل : $\cos 3\theta$ و $\sin(3\theta)$

لدينا: $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \left((\cos\theta)^3 + 3(\cos\theta)^2(i\sin\theta) + 3(\cos\theta)(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3\right)$

$$= \left(\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\right)$$

إذن $\cos(3\theta) = Re\left(\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\right)$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\left(1 - \cos^2\theta\right)$$

و بالتالي $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

و لدينا: $\sin(3\theta) = Im\left(\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta\right)$

$$= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\left(1 - \sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta$$

و بالتالي: $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

### ملاحظة

- $\cos(n\theta) = Re(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ • $\sin(n\theta) = Im(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

## VI)- الكتابة العقدية لدوران

### تعريف

لتكن $\Omega$ نقطة من المستوى و $\alpha \in \mathbb{R}$

التحويل الذي يربط كل نقطة $M$ بالنقطة $M'$ حيث : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha[2\pi] \end{cases}$

يسمى الدوران الذي مركزه $\Omega$ و زاويته $\alpha$ و نرمز له بالرمز $R_{(\Omega,\alpha)}$

### ملاحظة

- إذا كان $\alpha \neq 0[2\pi]$ فإن النقطة $\Omega$ هي النقطة الصامدة الوحيدة بالدوران $R_{(\Omega,\alpha)}$
- إذا كان $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ فإن $AB = A'B'$.
- إذا كان $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ و $R(C) = C'$ و $R(D) = D'$ فإن $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)[2\pi]$.

### خاصية و تعريف

ليكن $R_{(\Omega,\alpha)}$ دورانا مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته $\alpha$ .

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي بحيث: $R(M) = M'$ ، لدينا:

$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ ، هذه الكتابة تسمى الكتابة العقدية للدوران $R_{(\Omega,\alpha)}$.

## برهان

$$R(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\alpha[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z-\omega|=|z'-\omega| \\ arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\alpha[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega}=e^{i\alpha} \Leftrightarrow z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega)$$

## الدورة الاستدراكية2008

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$

2) نعتبر ، في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ ، النقطتين $A$ و $B$ اللتين لحقاهما على التوالي هما : $a=4+i$ و $b=8+3i$ .

ليكن $z$ لحق نقطة $M$ من المستوى و $z'$ لحق النقطة $M'$ صورة $M$ بالدوران $R$ الذي مركزه النقطة $\Omega$ التي لحقها هو $\omega=1+2i$ وزاويته هي $\frac{3\pi}{2}$ .

أ- بين أن : $z'=-iz-1+3i$

ب- تحقق من أن لحق النقطة $C$ صورة النقطة $A$ بالدوران $R$ هو $c=-i$ .

ج- بين أن : $b-c=2(a-c)$ ثم استنتج أن النقط $A$ و $B$ و $C$ مستقيمية .

## الدورة العادية 2010

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+10=0$ .

2) نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ ، النقط $A$ و $B$ و $C$ التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3-i$ و $b=3+i$ و $c=7-3i$ .

ليكن $z$ لحق نقطة $M$ من المستوى و $z'$ لحق النقطة $M'$ صورة $M$ بالدوران $R$ الذي مركزه $A$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ .

أ – بين أن : $z'=iz+2-4i$ .

ب – تحقق من أن لحق النقطة $C'$ صورة النقطة $C$ بالدوران $R$ هو $c'=5+3i$ .

ج – بين أن : $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$ ثم استنتج أن المثلث $BCC'$ قائم الزاوية في $B$ و أن $BC=2BC'$ .

## الدورة الاستدراكية 2010

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط $A$ و $B$ و $C$ التي ألحاقها على التوالي هي : $a=8i$ و $b=4\sqrt{3}-4i$ و $c=2\left(4\sqrt{3}+4i\right)$ .

ليكن $z$ لحق نقطة $M$ من المستوى و $z'$ لحق النقطة $M'$ صورة $M$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{4\pi}{3}$ .

أ – بين أن $z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ .

ب – تحقق من أن النقطة $B$ هي صورة النقطة $A$ بالدوران $R$ .

ج – بين أن $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ثم اكتب العدد $\frac{a-b}{c-b}$ على الشكل المثلثي .

د – استنتج أن المثلث $ABC$ متساوي الأضلاع .

## الدورة العادية: 2009

نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط $A$ و $B$ و $C$ التي ألحاقها على التوالي هي : $a=2-2i$ و $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$.

1) اكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين العقديين $a$ و $b$ .

2) نعتبر الدوران $R$ الذي مركزه النقطة $O$ وزاويته $\frac{5\pi}{6}$ .

أ- ليكن $z$ لحق نقطة $M$ من المستوى العقدي و $z'$ لحق النقطة $M'$ صورة $M$ بالدوران $R$ .
بين أن : $z'=bz$

ب- تحقق من أن النقطة $C$ هي صورة النقطة $A$ بالدوران $R$ .

3) بين أن : $\arg c \equiv \arg a+\arg b\ [2\pi]$ ثم حدد عمدة للعدد العقدي $c$ .

## الدورة الاستدراكية: 2009

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+25=0$

2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3+4i$ و $b=3-4i$ و $c=2+3i$ و $d=5+6i$ .

أ- احسب $\frac{d-c}{a-c}$ ثم استنتج أن النقط $A$ و $C$ و $D$ مستقيمية .

ب- بين أن العدد $p=3+8i$ هو لحق النقطة $P$ صورة النقطة $A$ بالتحاكي $h$ الذي مركزه $B$ ونسبته $\frac{3}{2}$

ج- اكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{d-p}{a-p}$ ثم استنتج أن $\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)$ وأن $PA=\sqrt{2}\,PD$ .