CLASSE :2BAC PC-D SIMILI N°1	CONTRÔLE CONTINU 4: DATE : 07/01/2020 DURÉE : 3H	COMPLEXE SCOLAIRE KHALIL ABDELHAFID SALA ELJADIDA

Barème

EXERCICE 1: (6 PTS)

1- Calculer les limites suivantes :

2 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{\sin 3x}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x^2+x+1)$ $\quad \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\ln(3x+4)}{x^2+x}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^3+2x)}{x^2+3x}$

0,5 2- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $3x^2-19x+28=0$.

1,5 b) En déduire la résolution des équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

i) $3\ln^2(x)-19\ln(x)+28=0$.

ii) $\ln(1+x)-\ln(6x-19)=\ln(x-3)$.

3- Déterminer les primitives de f sur I dans chacun des cas suivants :

1 a) $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{\left(x^3+3x^2+2\right)^3}$, $I=[0;+\infty[$.

1 b) $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{2+\sin 2x}+\tan x$, $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE 2: (4,5 PTS)

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{9u_n}{3+4u_n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

1 1- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $\dfrac{1}{2}\le u_n\le\dfrac{3}{2}$.

0,5 2- Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

0,25 3- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente .

4- On pose $v_n=2-\dfrac{3}{u_n}$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$.

0,5 a) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est géométrique et déterminer sa raison.

0,5 b) Ecrire v_n puis u_n en fonction de n.

0,5 c) Déterminer le plus petit entier naturel n pour que $|v_n|\le 10^{-2}$.

0, 5 d) Retrouver la limite de la suite $(u_n)_n$.

5- On pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$, et $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{u_k}$.

0,75 Calculer S_n puis montrer que $T_n=\dfrac{2}{3}n+2-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

PROBLEME : (9,5 PTS)

PARTIE 1

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-2+\ln x$.

0,75 1- calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$ puis étudier les variations de g .

0, 5 2- a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et que $1<\alpha<1,5$.

0, 5 b) Donner un encadrement de α à 125×10^{-3}.

0, 5 3- En déduire que : $\begin{cases}\forall x\in]0,+\alpha[& g(x)<0\\ \forall x\in]\alpha,+\infty[& g(x)>0\end{cases}$.

PARTIE 2

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}$. Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0, 5 1- a) calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

0,75 b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ puis étudier le branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

0, 5 2- a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

0, 5 b) En déduire que f est strictement croissante sur $]\alpha,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0,\alpha[$.

0, 25 c) Donner le tableau de variations de f .

0, 5 d) Vérifier que : $f(\alpha)=2\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$.

0, 5 3- Soit (Δ) la droite d'équation : $y=x$.
Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ) .

4- Soit h la restriction de f sur $]\alpha,+\infty[$.

0,5 a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

0,5 b) Calculer $(h^{-1})'(e)$.

1 5- Tracer la courbe (C_f), $(C_{h^{-1}})$ et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. (on admet que (C_f) admet un point d'inflexion et que $f(\alpha)\approx1,8$)

PARTIE 3 :

I- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_0=e^2\\ u_{n+1}=f(u_n)\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

0, 5 1- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}: e<u_n\le e^2$.

0, 5 2- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

0, 75 3- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

NB : **1point pour la clarté du raisonnement et la présentation de la copie.**