المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
قطاع التربية الوطنية

المركز الوطني للامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة الاستدراكية 2007)
الموضوع

C: RS24

المــــادة: الرياضيــــــــات

مدة الإنجاز: 4

الشعـــب(ة): العلوم الرياضية (أ) و (ب)

المعامل: 10

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول (3 نقط)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) التالية : $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ حيث a و b و p و q أعداد صحيحة نسبية و $p \wedge q = 1$

0.5ن | 1 – أ) بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$

0.5ن | ب) بين أن : $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة (S).

0.5ن | 2 – ليكن x حلا للنظمة (S) . بين أن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$

0.5ن | 3– ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم العدد $x - x_0$. بين أن x حل للنظمة (S) .

0.5ن | 4 – استنتج مجموعة حلول النظمة (S) .

0.5ن | 5 – حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 3\,[13] \end{cases}$

التمرين الثاني (نقطتان)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 .
لدينا n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k $(1 \le k \le n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $n - k$ كرة سوداء .
نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة.

0.5ن | 1-احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء .

0.75ن | 2- احسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

0.75ن | 3- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي.

التمرين الثالث (3 نقط)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر المجموعة : $(H) = \left\{ M(z) \in (P) / z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2 = 1 \right\}$

0.25ن | 1- أ) حدد معادلة ديكارتية للمجموعة (H)

0.5ن | ب) بين أن (H) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0.25ن | ج) انشئ (H) .

2- $M(z)$ و $M(z')$ نقطتان من (H) . نضع : $\varphi(z, z') = z\overline{z'} + \overline{z}z' - \overline{z}\overline{z'}$

0.5ن | أ) بين أن : $M(\varphi(z, z')) \in (H)$

0.5ن | ب) تحقق أن $\varphi(z, 1) = z$ وأن $\varphi(z, \overline{z}) = 1$.

1ن 3- نزود (H) بقانون التركيب الداخلي $*$ حيث لكل $M(z)$ و $M(z')$ من (H) :
$$M(z)*M(z')=M(\varphi(z,z'))$$
بين أن : $((H),*)$ زمرة تبادلية .

التمرين الرابع (3 نقط)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعة التالية : $\mathcal{F}=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ مزودة بجمع المصفوفات $(+)$ و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي $(.)$ و ضرب المصفوفات $(\times)$.

نضع : $I=M(1,0)$ و $J=M(0,1)$ و $O=M(0,0)$

0.5ن 1-أ) بين أن $(\mathcal{F},+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي.

0.5ن ب) بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{F},+,\bullet)$ واعط بعده .

0.5ن 2- ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$
بين أن الأسرة $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,.)$

3- نعتبر التطبيق ψ من $\mathbb{C}$ نحو $\mathcal{F}$ المعرف بما يلي :
$\psi(z)=M(a,b)$ لكل عنصر z من $\mathbb{C}$ حيث : $z=a+\alpha b$ و a و b عددان حقيقيان .

0.5ن أ) تحقق أن : $\psi(\alpha)=J$: و أن $J^2=-2(I+J)$

0.5ن ب) حدد قيمتي α التي يكون من أجلهما التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathcal{F},\times)$

0.5ن 4- نأخذ : $\alpha=-1+i$
اكتب في الأساس (I,J) المصفوفة J^{2007} .

التمرين الخامس (9 نقط)

I / 1- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=1+x-e^{-x}$

0.25ن أ) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

0.5ن ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ وضع جدول تغيرات g .

0.25ن ج) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

2- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{1+x-e^{-x}}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5ن أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)$

0.25ن ب) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

المـــادة :	الرياضيات
الشعـب(ة):	العلوم الرياضية (أ) و(ب)

0.25ن ج) ضع جدول تغيرات الدالة f .

0.5ن د) أنشئ (C) .

0.5ن 3- أ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$
بين أن المعادلة : $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0;+\infty[$.

0.5ن ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تناقصية وأنها متقاربة .

0.5ن ج) أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

0.25ن II/ 1- أ) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تكافئ المعادلة $e^{-x} = x$

0.5ن ب) بين أن المعادلة $e^{-x} = x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha = x_1$ وأن : $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$

2- نعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $y_1 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ y_{n+1} = e^{-y_n}$

0.5ن أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

0.5ن ب) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - \alpha|$

0.5ن ج) استنتج أن $(y_n)_{n\geq1}$ متقاربة محددا نهايتها.

III/ لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $F(0) = \frac{1}{2}\ell n\, 2$ و $\forall x > 0\ ;\ F(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$

0.25ن 1- أ) بين أن : $\forall t > 0\ ;\ \frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$

0.5ن ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0.5ن 2-أ) بين أن : $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$ $(\forall t \geq 0)$

0.5ن ب) بين أن لكل t من المجال $]0;4[$: $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

0.25ن ج) استنتج أن F متصلة على اليمين في 0 .

0.5ن 3-أ) بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ واحسب $F'(x)$ من أجل $x > 0$

0.25ن ب) ادرس تغيرات F على $\mathbb{R}_+$.