ثانوية ابن خلدون	الفـــرض8	28- 04 -2010
2بـاك ع رياضية ا	2س	ذ. العمراني

التمرين1:	
0.5	**1. بين أن** $\forall\, x \in Z/5Z,\quad x^2 \notin \{\bar{2}, \bar{3}\}$.
1.5	**2. استنتج أن المعادلة** $\left\|x^2 - 10y^2\right| = 2$ **ليس لها حل في** Z^2 .
0.5	**3. ا. بين انه يوجد زوج** (u_0, v_0) **من** Z^2 **حيث** $2u_0 + 5v_0 = 1$ **(ليس مطلوبا تحديد** (u_0, v_0) **).**
1	**ب. حل المعادلة التالية** $2x + 5y = 1$ **في** Z^2 .
	4. نعتبر في Z^2 **المعادلة** $(E): x^2 - 10y^2 = 1$ **. وليكن** (x, y) **حلا لها .**
0.5	أ. **بين أن** $x \wedge y = 1$
1	ب. **بين أن** $\begin{cases} x \equiv 1 \ [2] \\ x \equiv \ [5] \end{cases}$
0.5	ت. **استنتج أن** $10/x - 1$.
1	ث. **بين أن** $2/y$

التمرين2	
	جزء 1
1	**لتكن** $I = \{-1, 1\}$ **. بين أن** $(I, \times)$ **زمرة تبادلية.**
	جزء 2
	نعتبر المجموعة A **المعرفة بما يلي** $A = \{a + b\sqrt{5} : (a,b) \in Z^2\}$ **حيث** Z **هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية.**
0.5	**1. تأكد أن** A **جزء مستقر من** $(IR, +)$ **ومن** $(IR, \times)$**.**
1	**2. بين أن** $(A, +)$ **زمرة تبادلية .**
1	**3. برهن أن** $(A, +, \times)$ **حلقة تبادلية وواحدية وكاملة.**
0.5	**4. بين أن** $(A, +, \times)$ **ليست جسما .**
	5. نعتبر التطبيق φ **المعرف بما يلي** $\varphi : A \to Z,\quad x = a + b\sqrt{5} \mapsto a^2 - 5b^2$
1	أ. **بين أن** φ **تشاكل من** $(A, \times)$ **نحو** $(Z, \times)$ **.**
1.5	ب. **لتكن** $\mathbb{U}$ **مجموعة عناصر** A **التي تقبل مقلوبا في** $(A, \times)$**. ادكر دون تعليل بنية** $(\mathbb{U}, \times)$ **وبرهن أن** $\forall\, x \in A,\quad x \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \varphi(x) \in I$
1.5	**6. برهن أن** $\forall\, x = a + b\sqrt{5} \in A,\quad \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
	جزء 3
	لكل عددين صحيحين نسبيين a **و** b نعتبر المصفوفة $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{5} \\ b\sqrt{5} & a \end{pmatrix}$ ولتكن E المجموعة المعرفة ب $E = \{M(a,b) / \ a, b \in Z\}$.
	نعتبر التطبيق ψ **المعرف بما يلي** $\psi : A \to E,\quad x = a + b\sqrt{5} \mapsto M(a,b)$
2	**1. بين أن** ψ **تشاكل تقابلي من** $(A, \times)$ **نحو** $(E, \times)$ **ومن** $(A, +)$ **نحو** $(E, +)$ **.**
0.5	**2. استنتج بنية** $(E, +, \times)$
	3. لتكن Λ **مجموعة عناصر** E **التي تقبل مقلوبات بالقانون** $\times$ **(ضرب مصفوفتين) في** E **.**
1	أ. **بين أن** $\psi(\mathbb{U}) = \Lambda$
2	ب. **لتكن** $M = M(a,b)$ **من** E **. برهن أن** $M \in \Lambda \Leftrightarrow a^2 - 5b^2 \in I$ **وحدد** M^{-1} **في هده الحالة .**