تمرين 1

حدد النهايات التالية $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\ln(x)$ و

$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2+1)-5x$ و $\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{\ln(x^2+1)}}{x}$ و

$\lim_{x\to1}\frac{\ln(2x\sqrt[3]{x}-1)}{x-1}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$

تمرين 2

احسب $f'(x)$ في كل حالة مما يلي و $f(x)=\ln(\ln(x))$ و

$f(x)=Arc\tan(\ln(x^2+1))$ و $f(x)=\ln\left(\sqrt[3]{Arc\tan(x)+\frac{\pi}{2}}\right)$ و

$f(x)=\frac{\ln|x^2-3x|}{x-2}$.

تمرين 3

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي $f_n(x)=x^n\ln(1+x)$. وليكن (C_n) منحنى f_n في المستوى المنسوب الى معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. لتكن g_n الدالة المعرفة بما يلي $g_n(x)=n\ln(1+x)+\frac{x}{x+1}$
   أ. حدد حيز تعريف الدالة g_n وادرس تغيراتها.
   ب. استنتج اشارة الدالة g_n .
2. ادرس تغيرات f_n (ضع جدول التغيرات للحالات $n=1$ و n زوجي و n فردي).
3. ا. ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2) .
   ت. ارسم (C_1) و (C_2) .

تمرين 4

1. ادرس تغرات الدالة $x\mapsto\ln(\sqrt{x})-\sqrt{x}+1$.
2. استنتج ان $\forall x\succ0\ \ \ln(\sqrt{x})\le\sqrt{x}-1$.
3. ليكن $r\in\mathbb{Q}^+$ ادرس صحة العبارة $\forall x\succ0\ \ \ln(x^r)\le x^r-1$.

تمرين 5

لكل n عدد صحيح طبيعي اكبر او يساوي 3 نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي $f_n(x)=nx+2\ln(x)$.

1. ضع جدول تغيرات الدالة f_n .
2. بين ان $\forall x\succ0\ \ \ln(x)\prec\sqrt{x}$
3. بين ان المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0,+\infty[$.
4. بين ان $\frac{1}{n}\prec u_n\prec\frac{1}{\sqrt{n}}$ ثم استنتج ان $(u_n)_{n\ge3}$ متقاربة محددا نهايتها

تمرين 6

1. بين ان $\forall x\succ0\ \ \frac{1}{1+x}\prec\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\prec\frac{1}{x}$.
2. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي $\forall n\ge1\ \ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
   أ. مستعملا 1. بين ان $\forall n\ge1\ \ u_{n+1}-1\prec\ln(n+1)\prec u_n$.
   ب. استنتج دراسة لتقارب $(u_n)_{n\ge1}$ محددا نهايتها.
3. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي $\forall n\ge1\ \ v_n=u_n-\ln(n)$
   أ. برهن ان $\forall n\ge1\ \ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\prec v_n\le1$.
   ب. بين ان $(v_n)_{n\ge1}$ تناقصية قطعا.
   ت. استنتج دراسة لتقارب $(v_n)_{n\ge1}$ واعط تاطيرا لنهايتها.
4. لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نعتبر الدالة f_n المعرفة بما يلي $f_n(x)=\ln(x-\ln(n))$
   أ. ادرس تغيرات f_n .
   ب. ادرس الفرعين اللانهائيين لمنحنى f_n .
   ت. نعتبر المتتالية $(w_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي $\forall n\ge1\ \ w_n=f_n(u_n)$.
   ادرس تقارب المتتالية $(w_n)_{n\ge1}$.

تمرين 7

التمرين الرابع:(6 نقط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x+\ln x$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (نأخذ: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

1- احسب النهايات التالية: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to0^+}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

2- أ) ضع جدول تغيرات الدالة f

ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ، ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .

3- احسب $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (C) و (C') منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

4- أ) احسب التكامل $\int_1^{e+1}f^{-1}(x)dx$ (يمكنك وضع : $t=f^{-1}(x)$)

ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين (C') و المستقيمات ذات المعادلات : $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$

5- نعتبر المعادلة : $(E_n)\ :\ x+\ln x=n$

أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n

ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن: $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$

6- أ) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ f(x_n)\le f(n)$ ثم استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ x_n\le n$

ب) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ n-\ln(n)\le x_n$

ج) احسب النهايتين: $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n-n}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n-\ln(n)}$

التمرين الرابع (9 نقط)

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=4\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$ ؛

وليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدته $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

1) احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

2) أ- بين أن: $(\forall x\in]0;+\infty[),\ f'(x)=4\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f).

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث:

$1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$ (نعطي $1<\ln 3<1,1$).

4) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1.

5) ارسم المنحنى (C).

II- 1) بين أن: $(\forall t\in[0;+\infty[),\ 1-t\le\frac{1}{1+t}\le 1$.

2) استنتج أن: $(\forall a\in[0;+\infty[),\ a-\frac{a^2}{2}\le\ln(1+a)\le a$.

III- لكل عدد صحيح n بحيث $4\le n$، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي:

$$f_n(x)=n\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{2}$$

وليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم.

1) ادرس تغيرات الدالة f_n.

2) ادرس تقعر المنحنى (C) وبين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{\frac{5}{6}}$.

3) أ- قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ حسب قيم x.

ب- استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}).

4) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث: $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$.

5) بين أن $(u_n)_{n\ge4}$ متتالية تناقصية قطعا (يمكنك استعمال نتيجة السؤال III- 3)).

6) أ- باستعمال نتيجة السؤال II- 2) ، بين أن:

$$(\forall n\ge4),\ \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2}\le\ln(u_n)\le u_n-1$$

ب- استنتج أن: $(\forall n\ge4),\ \frac{(u_n)^2}{2n}\le u_n-1\le\frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$

ج- بين أن: $(\forall n\ge4),\ \frac{1}{2n}\le u_n-1\le\frac{e}{n}$

د- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge4}$ متقاربة محددا نهايتها.

7) أ- بين أن: $(\forall n\ge4),\ e^{\frac{5}{6}}<v_n$ ، (نعطي: $e^{\frac{5}{3}}<5,3$).

ب- استنتج أن: $\lim_{x\to+\infty} v_n=+\infty$.

Exercice : Montrer que

Pour tout $x\ge\frac{1}{2}$,

$$|\ln(1+x)-x|\le x^2.$$

Exercice: En utilisant le fait que

$$\forall x\ge0,\quad 0\le x-\ln(1+x)\le\frac{x^2}{2}$$

étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\quad \text{où } n\ge1.$$

مسألة:(10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[0,1]$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & ;\quad 0\le x<1\\ f(1)=0\end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن الدالة f متصلة على اليسار في 1

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1

3) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I ثم أعط جدول تغيراتها.

4) أ- بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$

ب- أنشئ المنحنى (C) مبرزا نصف مماسه في النقطة التي أفصولها 0 . (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

5) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال I يحقق: $f(\alpha)=\alpha$

6) أ- بين أن الدالة f تقابل من المجال I نحو I .

ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل عنصر x من المجال I .

II- نضع : $I_0=\int_0^1 f(t)dt$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $I_n=\int_0^1 t^n f(t)dt$

1) بين أن المتتالية $(I_n)_{n\ge0}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

2) بين أن : $(\forall n\ge0)\quad 0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$ ثم حدد نهاية المتتالية $(I_n)_{n\ge0}$.

III- لكل عدد حقيقي x من المجال $J=[0,1[$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع :

$F_0(x)=\int_0^x f(t)dt$ و $F_n(x)=\int_0^x t^n f(t)dt$ و $F(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{1-t}dt$ و $S_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n}F_k(x)$

1) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall x\in J)\quad F(x)-S_n(x)=\int_0^x\frac{t^{n+1}f(t)}{(1-t)}dt$

2) أ- بين أن الدالة : $x\to(1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطعا على المجال J

ب- استنتج أن الدالة : $t\to\frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على المجال $[0,x]$ مهما يكن x من المجال J

3) أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall x\in J):\quad 0\le F(x)-S_n(x)\le\frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{1-x}\right)$

ب- استنتج أنه مهما يكن العدد x من المجال J لدينا : $\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$

4) أ- حدد $F(x)$ من أجل $x\in J$

ب- حدد النهاية: $\lim_{x\to1^-}F(x)$

التمرين الرابع:(6.5 نقط)

الجزء الأول: دراسة الحلول الموجبة للمعادلة : $(E): e^x=x^n$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $D=[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln x} & ;\quad x\ne0\\ f(0)=0\end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $e^x=x^n\Leftrightarrow n=f(x)$

2- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

3- احسب النهايات : $\lim_{x\to1^-}f(x)$ و $\lim_{x\to1^+}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها.

4- ادرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم أعط جدول تغيراتها.

5- بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها .

6- انشئ المنحنى (C)

7- بين أنه إذا كان $n\ge3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين a_n و b_n بحيث : $1<a_n<e<b_n$

الجزء الثاني: دراسة تقارب المتتاليتين $(a_n)_{n\ge3}$ و $(b_n)_{n\ge3}$

1- بين أن : $(\forall n\ge3)\quad b_n\ge n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n\ge3}$

2- أ) بين أن المتتالية $(a_n)_{n\ge3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

ب) بين أن: $(\forall n\ge3)\quad \frac{1}{n}<ln(a_n)<\frac{e}{n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(a_n)_{n\ge3}$

ج) بين أن: $\lim_{n\to+\infty}a_n^n=e$

EXERCICE 4 (7 points) commun à tous les candidats :

1) Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction g_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

a) Déterminer les limites de g_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de g_n.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.
On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1\,;e]$.

c) Etudier le signe de $g_n(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0\,;1)$ et le point B_n de coordonnées $(n\,;0)$.

b) Faire un croquis représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).

3) a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.

b) Exprimer $g_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que : $g_{n+1}(\alpha_n) < 0$.

c) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (α_n).

d) On admet que la suite (α_n) converge. On note alors ℓ sa limite.
Etablir que $\ln \ell = 1$ et en déduire la valeur de ℓ.

4) Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x\ln x - 2x + \dfrac{x^2}{2n} \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

a) Démontrer que la fonction f_n est continue en 0.

b) Déterminer la limite de $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x}$ quand x tend vers 0 ?
La fonction f_n est-elle dérivable en 0 ?
Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f_n ?

c) Démontrer que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f_n'(x)$ est du signe de $g_n(x)$.
Dresser alors le tableau de variation de la fonction f_n en précisant la limite de f_n en $+\infty$.

d) Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ on note $\mathscr{C}_n$ les courbe représentative de f_n
Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$

Exercice 2

On désigne par n un nombre entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation $e^x = x^n$, que l'on note (E_n). À cet effet, on introduit la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

A. ÉTUDE DES RACINES POSITIVES DE (E_n).

1. Étude des racines positives des équations (E_1) et (E_2).

(a) Étudier et représenter sur $[0;+\infty[$ les fonctions f_1 et f_2.

(b) Étudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2).

2. Étude des racines positives de l'équation (E_3)

(a) Étudier et représenter sur $[0;+\infty[$ la fonction f_3.
En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacune d'elles entre deux entiers consécutifs.

(b) Soit la suite définie par la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0 où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u.

- Montrer que, si $u < y_0 \leqslant v$, alors, pour tout entier naturel n, $u < y_n \leqslant v$.
- Montrer que, si $v \leqslant y_0$, alors, pour tout entier naturel n, $v \leqslant y_n$.
- Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.
  En déduire, selon la position de y_0 par rapport à v, le sens de variation de la suite (y_n).

- Étudier enfin la convergence et la limite de la suite (y_n).

(c) On choisit désormais $y_0 = 4$.
Écrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de y_n pour un entier n donné.
Établir pour tout entier naturel n que $0 \leqslant v - y_{n+1} \leqslant 0,75(v - y_n)$ puis que $0 \leqslant v - y_n \leqslant 0,75^n$.
Comment suffit-il de choisir l'entier n pour que y_n constitue une valeur approchée de v à 10^{-5} près?
Donner cette valeur de y_n avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

(d) Soit la suite définie par la relation $x_{n+1} = \exp(\frac{x_n}{3})$ et la condition initiale x_0, où x_0 est un nombre réel positif strictement inférieur à v.

- Montrer que, si $u \leqslant x_0 < v$, alors, pour tout entier naturel n, $u \leqslant x_n < v$.
- Montrer que, si $x_0 \leqslant u$, alors, pour tout entier naturel n, $x_n \leqslant u$.
- Étudier le signe de $x_{n+1} - x_n$ en fonction du signe de $x_n - x_{n-1}$.
  En déduire, selon la position de x_0 par rapport à u, le sens de variation de la suite (x_n).
  Étudier enfin la convergence et la limite de la suite (x_n).

(e) On choisit désormais $x_0 = 2$.
Établir pour tout entier naturel n que $0 \leqslant x_{n+1} - u \leqslant 0,65(x_n - u)$, puis que $0 \leqslant x_n - u \leqslant 0,65^n$.
Écrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de x_n pour un entier n donné. Comment suffit-il de choisir l'entier n pour que x_n constitue une valeur approchée de u à 10^{-5} près?
Donner cette valeur de x_n avec toutes les décimales fournies par la calculatrice.

3. Étude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geqslant 3$.

(a) Étudier sur $[0;+\infty[$ la fonction f_n. En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.

(b) Déterminer, pour $n \geqslant 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$.
Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (u_n), puis prouver la convergence de celle-ci.

مسألة:(10 نقط)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$f_n(0)=0$ و $f_n(x)=x(1-\ln x)^n$ من أجل $x>0$

ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأول

1- أ) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 .(يمكنك وضع $x=t^n$)

ب)ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0

ج) حدد النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x}$

2- أ) ادرس تغيرات الدالة f_1

ب) ادرس تغيرات الدالة f_2

3- أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2)

ب) أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) .(نقبل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_2))

(نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

التمرين الرابع:(10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x} \quad ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة f متصلة في الصفر .

2) لكل عدد حقيقي غير منعدم a من المجال I نعتبر الدالة العددية h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال I بما يلي: $h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$

أ)احسب $h_a(a)$ و $h_a(0)$ ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث:

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

ب)استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $f'(0)=-2$.

3) أ)بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $I\setminus\{0\}$

و أن: $(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$ حيث: $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

ب)بين أن : $(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\ g(x)<0$

ج)استنتج تغيرات الدالة f على المجال I .

4) أ)احسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما.

ب)بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1,2]$ بحيث : $f(\alpha)=1$

ج)أنشئ المنحنى (C) (نأخذ : $\alpha\approx 1,3$)

II - 1) نضع : $J=[1,\alpha]$ و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $(\forall x\in I)$.

أ) بين الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال I و أن : $0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}$; $(\forall x\geq 1)$

ب) تحقق أن : $\varphi(\alpha)=\alpha$ و أن : $\varphi(J)\subset J$

2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\ln(1+2u_n)$; $(\forall n\geq 0)$

أ)بين أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ u_n\in J$

ب)بين أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج)استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.

(c) Montrer que $u_n = \exp(\frac{u_n}{n})$, et en déduire la limite L de la suite (u_n), puis un équivalent simple de $u_n - L$ quand n tend vers $+\infty$.

(d) Déterminer, pour $n \geqslant 4$, le signe de $f_n(v_{n-1})$. Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (v_n), puis étudier la limite de celle-ci.

(e) On pose pour tout réel $x > 1$: $g(x) = x - \ln(x)$. Montrer (à l'aide d'un théorème dont on rappellera l'énoncé) que g réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur $]1;+\infty[$.
Établir que $g(v_n/n) = \ln(n)$, montrer à l'aide de g^{-1} (bijection réciproque de g) que v_n/n tend vers $+\infty$, puis en déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$.

B. ÉTUDE DES RACINES NEGATIVES DE (E_n) .

1. Existence de racines négatives de (E_n).

(a) Étudier sur $]-\infty;0]$ les fonctions f_{2k} et f_{2k-1} pour tout entier $k \geqslant 1$.

(b) À quelle condition sur l'entier n l'équation (E_n) admet-elle des racines négatives ?

2. Étude des racines négatives de l'équation (E_{2n}).

(a) Encadrer entre deux entiers consécutifs la racine négative w_n de l'équation (E_{2n}) et déterminer, pour $n > 2$, le signe de $f_{2n}(w_{n-1})$.

(b) En déduire le sens de variation, la convergence et la limite L de la suite (w_n), puis un équivalent simple de $w_n - L$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (5 points)

1) Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln x + x$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

2) Dans la figure (2) de l'annexe ci-jointe, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ des fonctions g et h définies sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x$.

$\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ se coupent en un point d'abscisse β.

a) Par une lecture graphique donner le signe de f'(x) .

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(\beta) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

3) On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0,4 < x_1 < 0,5$ et $3,8 < x_2 < 3,9$.

c) Placer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points A (β, 0) et B(0, $\frac{1}{\beta}$) et en déduire une construction du point de coordonnées (β , f(β)).

d) Tracer $\mathscr{C}_f$.

4) Pour tout réel t de $]0,+\infty[\setminus\{\beta\}$, on désigne par $\mathscr{A}(t)$ l'aire de la partie du plan S(t) limitée par les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ et la droite d'équation x = t .

a) Montrer que pour tout réel $t \in]0,+\infty[\setminus\{\beta\}$, $\mathscr{A}(t) = f(\beta) - f(t)$.

b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer $S(t_0)$.

c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans $]0,\beta[$ tel que $\mathscr{A}(t_1) = \mathscr{A}(t_0)$.
Hachurer $S(t_1)$.

تمرين (المنسقية المركزية للرياضيات)

- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$

1) أ) بين أن الدالة f تزايدية قطعا .

ب)حدد نهاية الخارج $\frac{f(t)}{t}$ عندما تؤول t الى $+\infty$. ارسم المنحنى الممثل للدالة f .

2) ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم . نعتبر المعادلة : $(E_n): f(t) = \frac{1}{n}$

أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا a_n .

ب)بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} على المجال $[0,+\infty[$. اعط جدول تغيرات الدالة العكسية f^{-1}

ج) استنتج تغيرات المتتالية $(a_n)_{n\geq1}$ ثم حدد نهايتها .

3)أ)حدد نهاية الخارج $\frac{f(t)}{t}$ عندما تؤول t الى 0.

ب)استنتج نهاية المتتالية $(na_n)_{n\geq1}$.

التمرين الرابع (10 ن)

جزء 1 :

لكل n من $\mathbb{N}$ نعتبر الدالة g_n المعرفة ب :

$$g_n(x) = x^2 + 1 - 2x(\ln x + n)$$

1) ادرس تغبرات g_n على $\mathbb{R}^{*+}$

2) احسب نهايات g_n عند $+\infty$ وعلى اليمين في الصفر

3) أ- بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا u_n في $\mathbb{R}^{*+}$

ب- استنتج إشارة g_n على $\mathbb{R}^{*+}$

جزء 2

لكل n من $\mathbb{N}$ نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة ب : $f_n(x) = \frac{\ln x + n}{x^2+1}$

و (C_n) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد وممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) أ بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن

$$\forall x \succ 0 \quad f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{x(x^2+1)^2} .$$

ب- احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n

ج- بين أن $f_n(u_n) = \frac{1}{2u_n^{\ 2}}$

2) أ- تأكد أن $u_1 = 1$ وبين أن $u_0 \in]1,2[$.

ب- ادرس الوضع النسبي ل(C_n) و (C_m) حيث n و m من $\mathbb{N}$

ج. بين أن (u_n) تناقصية قطعا واستنتج أنها متقاربة .

3) أنشئ في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنيين (C_1) و (C_0) .

تمرين (المنسقية المركزية للرياضيات)

A - 1 – نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$

أ) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[0,+\infty[$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0,+\infty[$

2 – نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

أ) بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

ب) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ج) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $f'(x) = e^{-x}(\frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x))$

د) ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

3 – ارسم المنحنى الممثل للدالة f في م. م. م (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

4 –أ) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجالJ يتم تحديده

ب) حدد تغيرات التقابل العكسي f^{-1} على المجال J

ج) ارسم في نفس المعلم المنحنى (C') الممثل للدالة f^{-1}

B - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ $(\forall n \geq 0)$

1 –أ) بين أنه إذا كان x من المجال $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$ فإن $f(x) \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$

تمرين (المنسقية المركزية للرياضيات)

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي من 1 .

A- لتكن الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g_n(x)=1+x-e^{-nx}$

1) أ) ادرس تغيرات الدالة g_n .

ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$ واعط جدول تغيرات g_n .

ج)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g_n(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

د) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(g_n(x)-x-1)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

ه) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g_n(x)=0$.

و)مثل مبيانيا الدالة g_1 في م م م

2) أ) بين أن : $(\forall n\geq 1)\ (\exists! x_n>0)\quad g_n(x_n)=1$

ب)ادرس إشارة $g_{n+1}(x)-g_n(x)$

ج)استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تناقصية

د)بين أن $(\forall n\geq 1)\ x_n=e^{-nx_n}$

ه)استنتج نهاية المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$

B- نعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ المعرفة كما يلي : $y_1=1$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*; y_{n+1}=e^{-y_n}$

1) بين أن x_1 هو الحل الوحيد للمعادلة $e^{-x}=x$ وأن $\frac{1}{e}\leq x_1\leq 1$

2) أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{1}{e}\leq y_n\leq 1$

ب) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ |y_{n+1}-x_1|\leq e^{-\frac{1}{e}}|y_n-x_1|$

ج) استنتج أن $(y_n)_{n\geq1}$ متقاربة وحدد نهايتها .

C-لتكن F الدالة العددية المعرفة $\mathbb{R}^+$ كما يلي : $F(0)=\frac{1}{2}$ و $\forall x>0\ ;\ F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{g_1(t)}\,dt$

1) أ) بين أن : $\forall t>0\ ;\ \frac{1}{1+t}\leq\frac{1}{g_1(t)}\leq\frac{1}{t}$

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

2) أ) بين أن : $(\forall t>0)\qquad 1-t\leq e^{-t}\leq 1-t+\frac{t^2}{2}$

ب) استنتج أن F متصلة على اليمين في 0 .

ج) ادرس اشتقاق الدالة F على اليمين في 0 .

3) أ) بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ واحسب $F'(x)$ من أجل $x>0$

ب) ادرس تغيرات F على $\mathbb{R}^+$.

ج) مثل مبيانيا الدالة F.

France septembre 2004 EXERCICE 2 6 points

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle] 0 ; + ∞ [, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1° Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln y}{y}$.

2° Soit h la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [par $h(x)=\frac{\ln x}{x}$.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

a) Rappeler la limite de la fonction h en + ∞ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b) Calculer h'(x), où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h ; retrouver les variations de la fonction h. Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

c) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

3° Soit λ un élément de l'intervalle $]0,\frac{1}{e}[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle] 1 ; e [et d'un unique nombre réel b de l'intervalle] e ; + ∞ [tels que h(a) = h(b) = λ.

Ainsi le couple (a, b) est solution de (E).

4° On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle]1 ; e [, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle] e ; + ∞ [tel que h(a) = h(b) (on ne cherchera pas à exprimer s(a) en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes

a) Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b) Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c) Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variations de s

5° Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

ب) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α و أن : $\frac{1}{2}\leq\alpha\leq\frac{3}{5}$

2 –أ) ادرس إشارة : $f(x)-x$

3- لكل عدد صحيح طبيعي n نضع : $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$

أ) بين أن المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متحاديتين (لاحظ أن $u_0\leq\alpha$)

ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

C - 1 –أ) بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)+f(x)=\frac{1}{1+e^x}$

ب) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\mathbb{R}$ التي تنعدم في 0

2 –أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq2$ يوجد عدد حقيقي وحيد x_n من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث : $f(x_n)=\frac{1}{n}$

ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq2}$ تزايدية

ج) بين أن $(x_n)_{n\geq2}$ غير مكبورة ثم استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$

3 – نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq2}$ المعرفة بما يلي : $v_n=\int_0^{x_n}f(x)dx$

أ) بين أن $(v_n)_{n\geq2}$ تزايدية و أن : $(\forall n\geq2); 0\leq v_n\leq 2\ln(2)$

ب) بين أن $(v_n)_{n\geq2}$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=2\ln(2)$

Exercice

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]1 ; +∞ [par $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$.

On nomme (C) la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y=\ln x$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en + ∞ .

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$. Interpréter graphiquement cette limite.

   b) Préciser les positions relatives de (C) et de Γ .

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O.

   a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle]1 ; + ∞[.

   Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a)-a f'(a)=0$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle]1 ; +∞[par $g(x)=f(x)-x f'(x)$.

   b) Montrer que sur]1 ; +∞[, les équations $g(x)=0$ et $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$. ont les mêmes solutions.

   c) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur **R** par $u(t)=t^3-t^2-t-1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur **R**.

   d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O.

   La courbe (C) et la courbe Γ sont données en annexe, page 6.

   Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

4. On considère un réel m et l'équation $f(x)=mx$ d'inconnue x.

   Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle]1 ;10].

ملاحظة : في التمرين أيمنه يجب رسم منحنى الدالة f والإجابة عن الأسئلة المرتبطة به انطلاقا منه

عبدالخالق العمراني