ثانوية موسى بن نصير مديرية الخميسات	تجريبي دورة فبراير2017 لمادة الرياضيات	2 بكالوريا علوم رياضية مدة الإنجاز : أربع ساعات المعامل : 09

تمرين رقم 01: (2,75 نقط) — 03

⇦ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), f_n(x) = nx^2 - (n+1) + \ln x .$$

1)- أ- بين أن f_n تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو $\mathbb{R}$. — 0,5

ب- استنتج أن المعادلة : $(E): f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n في $\mathbb{R}_+^*$ و أن $1 < a_n < 2$. — 0,5

2)- أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), f_n(a_{n+1}) = 1 - (a_{n+1})^2$ ، ثم استنتج رتابة المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. — 0,5

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ، ثم اعط تأطيرا لنهايتها . — 0,25

3)- أ- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), \frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ (يمكنك تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية) . — 0,25

ب- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \frac{2-a_n}{n(1+a_n)} < a_n - 1 < \frac{1}{n.a_n(1+a_n)}$. — 0,5

ج- احسب نهاية كل من $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ، حيث : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), b_n = n(a_n - 1)$. — 0,5

تمرين رقم 02: (02 نقط) — 02

I- نعتبر الدالة : $f : t \mapsto \ln^2(1+t)$.

1)- أ- بين أن : $(\forall t \in [0,1]), 0 \le f'(t) \le 2$. — 0,5

ب- استنتج أن : $(\forall (x,y) \in [0,1]^2), |f(x) - f(y)| \le 2|x-y|$. — 0,25

2)- احسب التكامل : $I = \int_0^1 f(t)\,dt$ (يمكنك استعمال مكاملة بالأجزاء مرتين) . — 0,5

II- ليكن $a \in]0,1[$ و لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+a}{n}\right) \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N}^*), v_n = u_n - \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) .$$

1)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), |v_n| \le \frac{2}{n}$ ، ثم استنتج نهاية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. — 0,5

2)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها . — 0,25

3,25 **تمرين رقم 03:** (2,5 نقطة)

⇦ لكل z من $\mathbb{C}$ نضع : $f(z)=(1+ia)z-2ia$ ، حيث $a\in\mathbb{R}^*$.

0,25 **1**)- بين أن للمعادلة : $(E):f(z)=z$ حل وحيد ω في المجموعة $\mathbb{C}$ ينبغي تحديده .

في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر المجموعتين :

$(D)=\{M(z)\in(\mathrm{P});f(z)\in\mathbb{R}\}$ و $(\Delta)=\{M(z)\in(\mathrm{P});f(z)\in i\mathbb{R}\}$.

0,5 **2**)- أ- بين أن (D) و (Δ) مستقيمان ينبغي تحديد معادلتيهما .

0,5 ب- بين أن : $(\Delta)\perp(D)$ ، ثم حدد لحق نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

3)- نضع : $\theta=Arc\tan(a)$ ، بين أن لكل نقطة $M(z)$ من (P) بحيث $z\neq\omega$ ، لدينا :

0,75 $\Omega M'=\dfrac{1}{\cos\theta}\times\Omega M$ و $\overline{(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})}\equiv\theta[2\pi]$ ، حيث $\Omega(\omega)$ و $M'(f(z))$.

0,5 **4**)- بين أن المجموعة : $(\Gamma)=\{M(z)\in(\mathrm{P});|f(z)-\omega|=1\}$ دائرة مركزها $\Omega(\omega)$ و شعاعها $r=\cos\theta$.

0,75 **5**)- بين أن المجموعة : $(\Gamma')=\left\{M(z)\in(\mathrm{P});|f(z)|=\dfrac{1}{\cos\theta}\right\}$ دائرة شعاعها $r=1$ و مركزها النقطة A_0 ذات اللحق : $z_0=2\sin^2\theta+i\sin(2\theta)$.

03 **تمرين رقم 04:** (2,75 نقطة)

1)- حدد و أنشئ في المستوى العقدي (P) ، المجموعة :

0,5 $(C)=\left\{M(z)\in(\mathrm{P});\arg\left(\dfrac{z-2}{z}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]\right\}$.

2)- نضع : $a=[1,\theta]$ ، حيث $\theta\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$. و في المستوى العقدي (P) نعتبر النقطتين : $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ ، حيث : $z_1=1+ia$ و $z_2=1-ia$.

0,5 أ- اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

0,5 ب- استنتج أنه لكل $\theta\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$ ، لدينا : $M_1\in(C)$ و $M_2\in(C)$.

3)- نفترض فيما يلي أن : $M_1\neq M_2$ و لتكن النقطة G مركز ثقل المثلث AM_1M_2 .

0,5 أ- بين أن : $aff(G)=1+\dfrac{2}{3}i\cos\theta$ ، ثم استنتج المحل الهندسي (Δ) للنقطة G عندما يتغير θ على المجال $\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$ و $M_1\neq M_2$.

0,5 ب- حدد قيم θ التي يكون من أجلها المثلث AM_1M_2 متساوي الساقين و قائم الزاوية .

0,5 ج- ما هي قيم θ التي يكون من أجلها المثلث AM_1M_2 متساوي الأضلاع ؟

8,75 ○ **تمرين رقم 05:** (10 نقط)

3pts I- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}, x>0 \\ f(0)=1 \end{cases} .$$

0,5 **1**)- أ- بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}^+$.

0,5 ب- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right), e^{-x}(x+1)-1<0$ ، ثم ا ستنتج رتابة f على $\mathbb{R}^+$.

2)- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و F_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$F_n(x)=\frac{1}{n!}.\int_0^x (x-t)^n e^{-t}dt .$$

0,5 أ- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right), F_1(x)=x-1+e^{-x}$.

0,5 ب- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right), F_{n+1}(x)=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}-F_n(x)$.

ج- استنتج أنه لكل $x\in\mathbb{R}^+$ ، لدينا :

0,5 $F_2(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+1-e^{-x}$ و $F_3(x)=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}+x-1+e^{-x}$.

0,5 **3**)- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right); -\dfrac{x}{2}\le f(x)-1\le -\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}$.

2,25 II- لكل $n\in\mathbb{N}$ نضع : $u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}\left(1+e^x\right)}dx$.

0,25 **1**)- أ- احسب التكامل u_0 .

0,5 ب- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية تناقصية ، ثم استنتج أنها متقاربة .

0,5 ج- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n+u_{n+1}=f(n)$ ، ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2)- لكل $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ نضع : $S_n=\displaystyle\sum_1^{n-1}(-1)^k f(k)$.

0,5 أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}); \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k e^{-kx}=\frac{(-1)^{n-1}.e^x}{e^{nx}\left(1+e^x\right)}-\frac{1}{1+e^x}$.

0,5 ب- استنتج أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right), S_n=(-1)^{n-1}u_n+\ln\left(\dfrac{1+e}{e}\right)$ ، ثم بين أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*-\{1\}}$ متقاربة محددا نهايتها .

3,5pts III- لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=\frac{1}{x}.\int_0^x f(t)\,dt, x>0 \\ F(0)=1 \end{cases}.$$

0,5 **1**)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*}\right), 1-\frac{x}{4}\le F(x)\le 1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{18}$.

0,5 ب- بين أن F متصلة و قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر و أول هندسيا النتيجة .

0,5 **2**)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right), 0\le F(x)\le \frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}.\int_0^1 f(t)\,dt$.

0,5 ب- احسب النهاية : $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ ، ثم أعط تأويلها الهندسي .

3)- أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_{+}^{*}$ و أن :

0,5 $\left(\forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*}\right), F'(x)=\frac{f(x)-F(x)}{x}$.

0,5 ب- بين أن F تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^{+}$ ، ثم ضع جدول تغيراتها .

0,5 **4**)- ارسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2 ○ **<u>تمرين إضافي رقم 01</u>:**

⇦ نعتبر العدد العقدي : $u=\left[1,\frac{\pi}{7}\right]$.

بين أن : $u-u^2+u^3=\frac{1}{1-u^3}$ واستنتج أن : $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{1}{2}$.

4 ○ **<u>تمرين إضافي رقم 02</u>:**

⇦ لكل $a\in\mathbb{C}-\{-i,i\}$ ، نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(E): z^2-(1+a)(1+i)z+\left(1+a^2\right)i=0$.

1)- أ- تحقق أن $u=a+i$ حل للمعادلة (E) .

ب- استنتج الحل الثاني v للمعادلة (E) ، ثم بين أن : $|u|+|v|\ge 2$.

ج- حدد (Δ) مجموعة النقط M ذات اللحق a التي يكون لأجلها : $|u|+|v|=2$.

2)- نفترض في كل ما يلي أن : $|a|=1$.

أ- بين أن : $\frac{u}{v}\in\mathbb{R}$.

ب- تحقق أن : $u^2=a\left[\left(a-\overline{a}\right)+2i\right]$ ، ثم استنتج أن : $\arg(u)\equiv\frac{1}{2}\arg(a)+\frac{\pi}{4}[\pi]$.

▪ <u>تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة</u> .