التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتين $A\,(0,-1,1)$ و $B\,(1,-1,0)$

والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$.

1. لدينا : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=\sqrt{3}^2$.

إذن (S) فلكة مركزها $\Omega(1,0,2)$ وشعاعها $R=\sqrt{3}$. ولدينا : $0^2+(-1)^2+1^2-2\times0-4\times1+2=0$ ، إذن $A\in(S)$.

2. لدينا : $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ ، ومنه فإن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}-1&-1\\1&0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

وبالتالي فإن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\,(1,1,1)$.

3. لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\,(1,1,1)$ متجهة منظمية على المستوى (OAB). إذن معادلة المستوى (OAB) تكتب على شكل $x+y+z+d=0$ ، وبما أن $O\in(OAB)$ ، فإن $x+y+z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB).

لنحسب مسافة النقطة A عن المستوى (OAB) : $d\left(\Omega,(OAB)\right)=\dfrac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R$.

وعليه فإن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) في النقطة A على اعتبار أن $A\in(S)$ و $A\in(OAB)$.

التمرين الثاني :

1. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+34=0$. مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=(-3)^2-1\times34=9-34=-25=(5i)^2$.

وبالتالي فإن للمعادلة السابقة حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_1=\frac{-b'+i\sqrt{-\Delta'}}{a}=\frac{-(-3)+5i}{1}=\boxed{3+5i} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-b'-i\sqrt{-\Delta'}}{a}=\frac{-(-3)-5i}{1}=\boxed{3-5i}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\{3-5i\ ,\ 3+5i\}$.

2. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=3+5i$ و $b=3-5i$ و $c=7+3i$. لتكن النقطة $M'(z')$ صورة النقطة $M\,(z)$ بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $4-2i$.

أ- لدينا : $M'=T\,(M)\Leftrightarrow\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\Leftrightarrow z'=z+aff\,(\vec{u})\Leftrightarrow\boxed{z'=z+4-2i}$

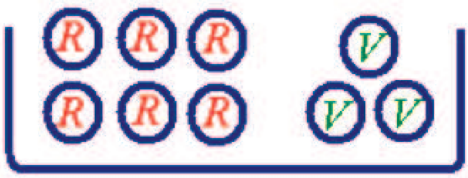
وبما أن : $a+4-2i=3+5i+4-2i=7+3i=c$ ، فإن: $C=T\,(A)$ أي C هي صورة A بالإزاحة T .

ب- لدينا : $\dfrac{b-c}{a-c}=\dfrac{3-5i-7-3i}{3+5i-7-3i}=\dfrac{-4-8i}{-4+2i}=\dfrac{2i\,(-4+2i)}{-4+2i}=\boxed{2i}$.

جـ- لدينا : $\dfrac{b-c}{a-c}=2i=\left[2,\dfrac{\pi}{2}\right]$. إذن :

$$\overline{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}\equiv\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\ [2\pi]$$
$$\overline{\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

ومنه فإن ABC مثلث قائم الزاوية في C ولدينا : $\dfrac{CB}{CA}=\left|\dfrac{b-c}{a-c}\right|=2$. إذن : $\boxed{BC=2AC}$.



التمرين الثالـــــث :

يحتوي صندوق على ست كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1. نسحب عشوائيا وفي آن واحــــــد (الترتيب غير مهم) ثلاث كرات من الصندوق. تثبيت الصنف : التاليفـــــان : C_n^p .

أ- احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء RRV هو : $\frac{C_6^2\times C_3^1}{C_9^3}=\frac{15\times3}{84}=\boxed{\frac{15}{28}}$.

ب- طريقة 1 : احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل RRV أو RVV أو VVV هو :

$$\frac{C_6^2C_3^1+C_6^1C_3^2+C_3^3}{C_9^3}=\frac{15\times3+6\times3+1}{84}=\boxed{\frac{16}{21}}.$$

طريقة 2 : نضع الحدث A: ≪ الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل ≫ .

الحدث المضاد للحدث A هو : $\overline{A}$: ≪ الحصول على ثلاث كرات حمراء - RRR - ≫.

لدينا : $p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{C_6^3}{C_9^3}=1-\frac{20}{84}=\frac{64}{84}=\boxed{\frac{16}{21}}$.

2. نسحب عشوائيا بالتتابـــــــع وبدون إحــــلال (الترتيب مهم والتكرار غير وارد) ثلاث كرات من الصندوق.

تثبيت الصنف : الترتيبـــــات بـــــدون تكــــــرار : A_n^p .

احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء هو : $\frac{A_6^3}{A_9^3}=\frac{120}{504}=\boxed{\frac{5}{21}}$.

التمرين الرابـــــع:

الجزء الأول:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-2\ln x$.

1. أ- ليكن $x\in]0,+\infty[$ ، لدينا : $g'(x)=(x-2\ln x)'=1-\frac{2}{x}=\boxed{\frac{x-2}{x}}$.

ب- نعلم أن : $g'(x)=\frac{x-2}{x}\ :\ \forall x\in]0,+\infty[$. إذن إشارة $g'(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ هي إشارة $x-2$.

ولدينا : $x\in]0,2]\Rightarrow x\le2\Rightarrow x-2\le0$ و $x\in[2,+\infty[\Rightarrow x\ge2\Rightarrow x-2\ge0$. إذن :

g تناقصية على المجال $]0,2]$ وتزايدية على المجال $[2,+\infty[$. خلاصة :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(2)=2(1-\ln 2)$	$\nearrow$	

2. بما أن : $e>2 \Rightarrow 1>\ln 2 \Rightarrow 1-\ln 2>0$ ، فإن : $g(2)=2(1-\ln 2)>0$.

ولدينا : $g(2)=2(1-\ln 2)$ قيمة دنوية مطلقة للدالة g على المجال $]0,+\infty[$ عند العدد 2 . ومنه فإن:

$$\forall x \in]0,+\infty[\ : \ g(x)\geq g(2)>0$$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-(\ln x)^2$.

1. لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-(\ln x)^2=\boxed{-\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$.

المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $\boxed{x=0}$.

2. أ- نضع : $t=\sqrt{x}$. إذن : $x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. وحيث أن $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ ، فإن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(t^2\right)}{t}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(2\times\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$$

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-(\ln x)^2=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=\boxed{+\infty}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$.

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=\boxed{1}$.

جـ- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x-(\ln x)^2-x=\lim\limits_{x\to+\infty} -(\ln x)^2=\boxed{-\infty}$ ، وحسب السؤال السابق ، فإن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$.

د- لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\ : \ f(x)-x=-(\ln x)^2\leq 0$. إذن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (Δ).

3. أ- ليكن $x\in]0,+\infty[$ ، لدينا : $f'(x)=\left(x-(\ln x)^2\right)'=1-2\ln'(x)\ln x=1-\frac{2\ln x}{x}=\frac{x-2\ln x}{x}=\boxed{\frac{g(x)}{x}}$.

وحسب إشارة $g(x)$ في الجزء الأول ، لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\ : \ f'(x)>0$. إذن f تزايدية على $]0,+\infty[$.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

جـ- معادلة المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 1 هي : $\boxed{y=x} \Leftrightarrow y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

4. لدينا : f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$. إذن: f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من المجال J حيث :

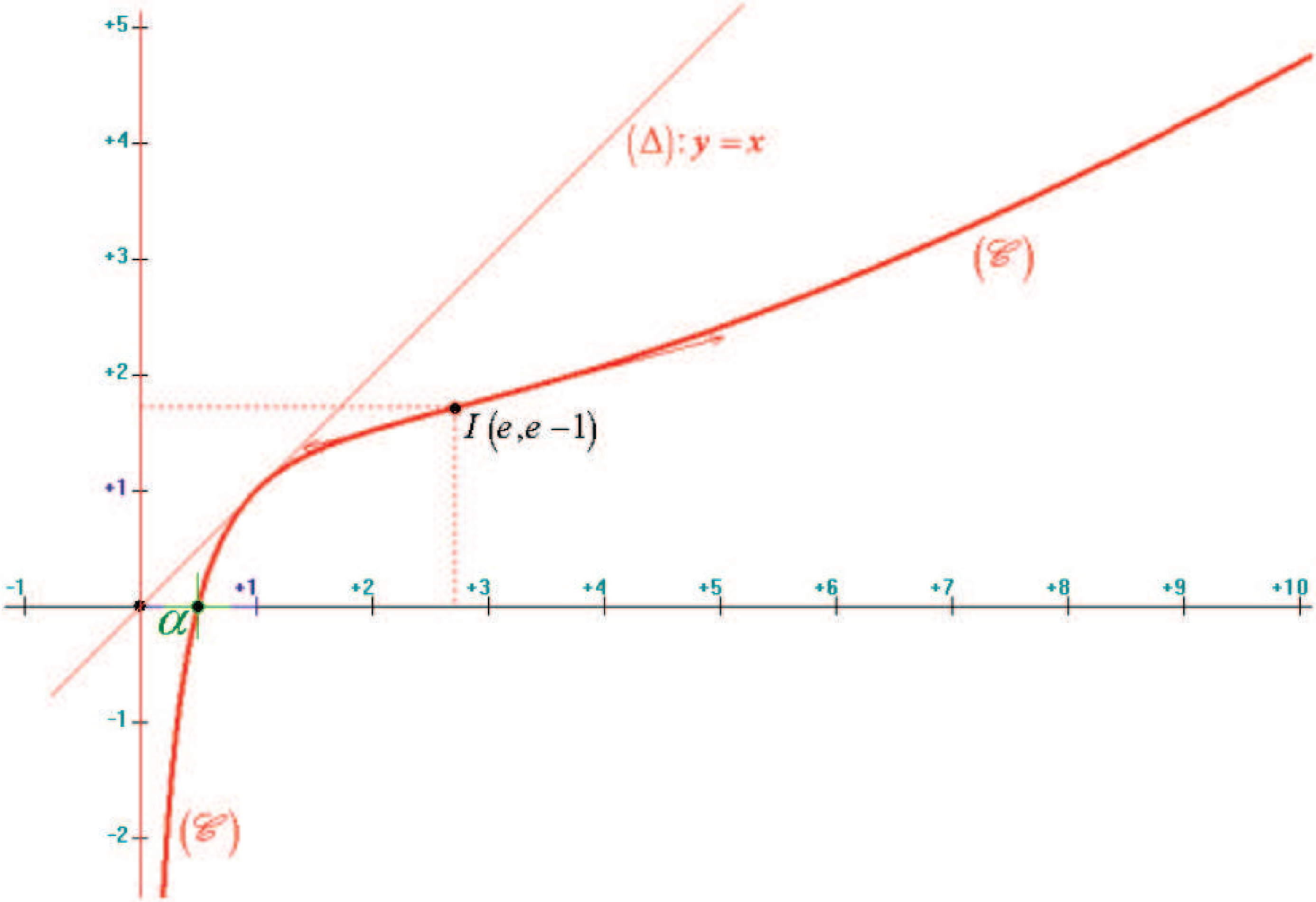
$J=f\left(]0,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ نحو المجال $I=]0,+\infty[$ ، وبما أن $0\in J$ ، فإن

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $I=]0,+\infty[$.

وبما أن : $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1=\frac{1-e}{e}<0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-(\ln 2)^2>0$ (لأنه حسب المعطيات $(\ln 2)^2<\frac{1}{2}$).

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، لدينا : $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$.

5. إنشاء المنحنى $(\mathscr{C})$: $\alpha\approx 0,4948664145$. $I(e,e-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C})$. $e\approx 2,7$.



6. أ- لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\ : \ H'(x)=(x\ln x-x)'=x'\ln x+x\ln' x-1=\ln x$. إذن : $H:x\mapsto x\ln x-x$

هي دالة أصلية للدالة $\ln:x\mapsto \ln x$ على المجال $]0,+\infty[$ ، ولدينا :

$$\int_1^e \ln(x)\,dx=\left[H(x)\right]_1^e=H(e)-H(1)=0-(-1)=\boxed{1}$$

ب- باستعمال المكاملة بالأجزاء، لدينا :

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln(x)^2\,dx&=\int_1^e H'(x)\ln(x)\,dx=\left[H(x)\ln(x)\right]_1^e-\int_1^e H(x)\ln'(x)\,dx\\&=H(e)\ln(e)-H(1)\ln(1)-\int_1^e\frac{x\ln x-x}{x}\,dx\\&=-\int_1^e\left(\ln(x)-1\right)dx=-\int_1^e\ln(x)\,dx+(e-1)=\boxed{e-2}\end{aligned}$$

- حسب السؤال أعلاه -

جـ- مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$ و $x=e$ هي :

$$\mathscr{A}=\int_1^e |f(x)-x|dx=\int_1^e (x-f(x))dx=\int_1^e (\ln x)^2 dx=\boxed{e-2}\approx 0,7(u.a.)$$

الجزء الثالث :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad : \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1. لنبين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} \ : \ 1\le u_n\le 2$.
   - ✓ من أجل $n=0$ ، لدينا : $u_0=2$ ، إذن : $1\le u_0\le 2$.
   - ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$.
     - نفترض أن : $1\le u_n\le 2$.
     - لنبين أن : $1\le u_{n+1}\le 2$:

نعلم أن f تزايدية على المجال $]0,+\infty[$. إذن : $1\le u_n\le 2\Rightarrow f(1)\le f(u_n)\le f(2)\Rightarrow 1\le u_{n+1}\le 2$

لأن : $f(2)-2=-(\ln 2)^2\le 0\Rightarrow f(2)\le 2$.

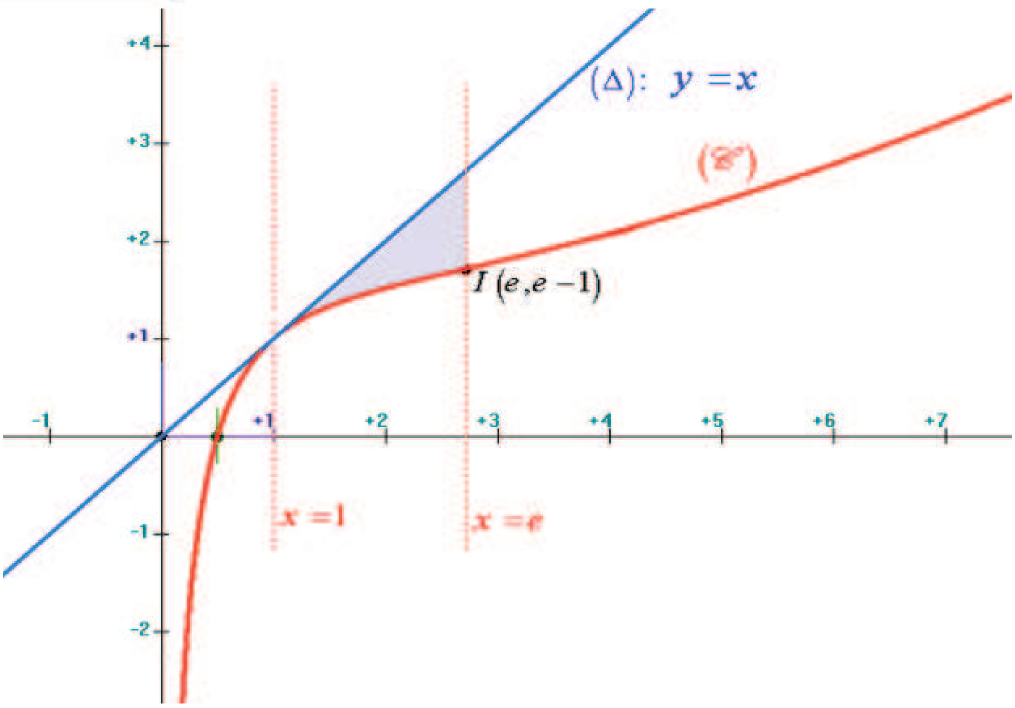
   - ✓ وبالتالي فإن : $\forall n\in\mathbb{N} \ : \ 1\le u_n\le 2$.

2. ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=-(\ln(u_n))^2\le 0$. إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية.

3. بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 1 ، فإنها متقاربة. ولدينا :
   - ✓ f دالة متصلة على المجال $[1,2]$.
   - ✓ f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,2]$. إذن : $f([1,2])=[f(1),f(2)]\subset[1,2]$ ، لأن : $f(2)\le 2$.
   - ✓ $u_0=2\in[1,2]$.
   - ✓ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l .

حسب مصاديق التقارب ، لدينا : $f(l)=l$ و $l\in[1,2]$.

ولدينا : $f(l)=l\Leftrightarrow l-(\ln(l))^2=l\Leftrightarrow \ln(l)=0\Leftrightarrow l=1$. وبالتالي فإن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=1}$.



تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2008

<u>المادة</u> : الرياضيات
<u>الشعب</u> : شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها
<u>المعامل</u> : 7
<u>مدة الإنجاز</u> : 3 س

تمرين 1:

1. حل المعادلة $z^2-8z+17=0$ في $\mathbb{C}$:

مميز المعادلة Δ هو :

$$\Delta = (-8)^2-4\times 17$$
$$=64-68$$
$$=-4=(2i)^2$$

إذن حلا المعادلة $z^2-8z+17=0$ هما :

$$z_1=\frac{-(-8)+2i}{2}=4+i \quad \text{و} \quad z_2=\overline{z_1}=4-i$$

2. أ- نبين أن $z'=-iz-1+3i$:

نضع الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه w وزاويته $\frac{3\pi}{2}$:

$$z'-w=e^{i\frac{3\pi}{2}}(z-w)$$

نعلم أن : $e^{i\frac{3\pi}{2}}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-i$

إذن المتساوية السابقة تصبح :

$$z'-(1+2i)=-i(z-(1+2i))$$

أي : $z'=-iz+i(1+2i)+(1+2i)$

$$=-iz+i-2+1+2i$$

ومنه $=-iz-1+3i$

أي أن : $z'=-iz-1+3i$

ب- التحقق من أن : c = -i :

لدينا صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة C

إذن : $z'_A=z_C$

ومنه فإن : $z_C=-iz_A-1+3i$

يعني أن : $=-ia-1+3i$

يعني أن : $=-i(4+i)-1+3i$

يعني أن : $=-4i+1-1+3i=-i$

أي أن : $z_C=-i$

ج- نبين أن $b-c=2(a-c)$ ، واستنتاج أن النقط A و B و C مستقيمية :

وبما أن : $b-c=8+3i+i=8+4i$ (1)

و : $2(a-c)=2(4+i+i)=8+4i$ (2)

من (1) و (2) نجد $b-c=2(a-c)$

أي أن : $\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CA}$ وبالتالي فإن النقط A و B و C مستقيمية.

التمرين 2:

1. مركز (S) وشعاعها :

تكافئ معادلة الفلكة (S) :

$$x^2-4x+y^2-6y+z^2+2z+5=0$$

يعني أن : $(x-2)^2-4+(y-3)^2-9+(z+1)^2-1+5=0$

يعني أن : $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$

وبالتالي فإن مركز (S) هو النقطة $I(2,3,-1)$ وشعاعها هو : $R=\sqrt{9}=3$

2. أ- نبين أن مسافة I عن (P) تساوي $\sqrt{6}$:

$$d(I,(p))=\frac{|x_1+2y_1+z_1-1|}{\sqrt{1^2+2^2-1^2}}$$

$$=\frac{|2+2\times3-1-1|}{\sqrt{6}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

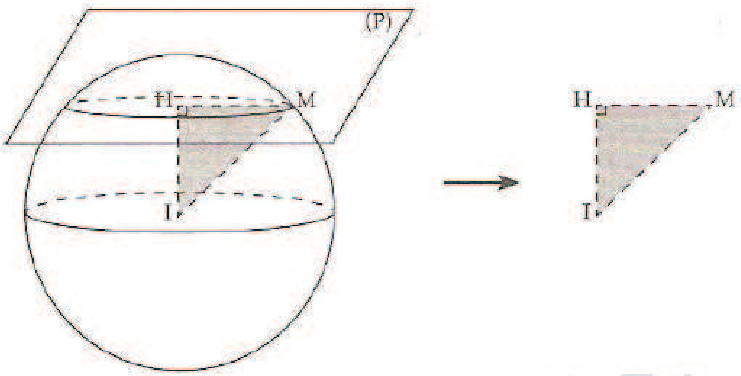
ومنه فإن : مسافة I عن (P) تساوي $\sqrt{6}$

ب- الإستنتاج :

بما أن : $\sqrt{6}\prec 3$ أي أن $d(I,(p))\prec R$ فإن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة Γ وشعاعها r بحيث :

$$r=\sqrt{R^2-d^2}$$

$$=\sqrt{9-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$$



r شعاع الدائرة وحسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة لدينا : $d^2+r^2=R^2$ إذن : $r=\sqrt{R^2-d^2}$

3.أ- التمثيل البارامتري ل (D) :

بما أن المتجهة $\vec{n}=(1,2,1)$ منظمية على المستوى (P) فإنها (أي $\vec{n}$) متجهة موجهة للمستقيم (D)

وبالتالي فإن تمثيل بارامتري ل (D) يكتب كالتالي :

$$\begin{cases}x=x_1+t\\ y=y_1+2t\\ z=z_1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R}) \quad \text{أي} \quad \begin{cases}x=2+t\\ y=3+2t\\ z=-1+t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$$

ب- نبين أن مركز الدائرة Γ هي النقطة $H(1,1,-2)$:

تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) هي مركز الدائرة Γ .

لتحديد إحداثياتها نعوض x و y و z في معادلة (p) فنجد : $(2+t)+2(3+2t)+(-1+t)-1=0$

يعني أن : $t+4t+t+2+6-1-1=0$

وبالتالي فإن : $6t=-6$

ومنه فإن : $t=-1$

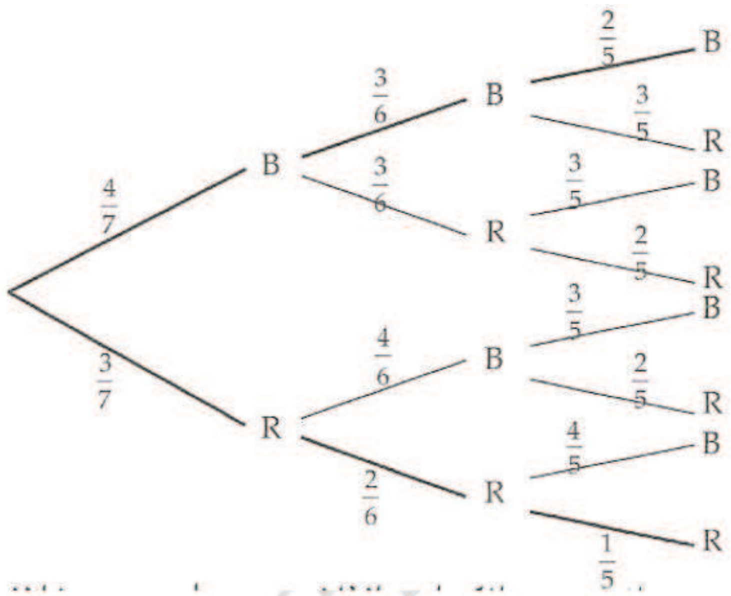
إذن إحداثيات H هي :

$$\begin{cases} x = 2-1 \\ y = 3-2 \\ z = -1-1 \end{cases}$$

ومنه فإن : $H(1,1,-2)$

تمرين 3:

يمكن استعمال شجرة الاختيارات كالتالي :



1. احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء :

يتحقق الحدث " الكرات الثلاث بيضاء " من خلال B-B-B– واحتماله هو جداء احتمالات فروعه

وبالتالي فإن : $P(BBB)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}$

يعني أن : $P(BBB)=\frac{24}{210}$

أي أن : $P(BBB)=\frac{8}{70}$

1. نبين أن احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$:

الكرات الثلاث من نفس اللون يعني انها كلها بيضاء أو حمراء .

وبالتالي فإن احتمال هذا الحدث هو :

$$P(BBB)+P(RRR)=\frac{4\times3\times2}{7\times6\times5}+\frac{3\times2\times1}{7\times6\times5}=\frac{24+6}{7\times6\times5}=\frac{30}{7\times30}=\frac{1}{7}$$

أي أن احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$

3. احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل :

طريقة أولى :

الحدث المضاد للحدث كرة واحدة على الأقل بيضاء هو جميع الكرات حمراء. احتمال هذا الحدث هو :

$$1-P(RRR)=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$$

طريقة ثانية : كون الإمكانيات Ω حيث : $Card\,\Omega = 7\times6\times5$

عدد الإمكانيات لتكون الكرة المسحوبة أولا بيضاء هو 4.

عدد الإمكانيات لتكون الكرة المسحوبة ثانيا بيضاء هو 3.

عدد الإمكانيات لتكون الكرة المسحوبة في المرة الثالثة بيضاء هو 2.

وبالتالي فإن احتمال الحدث BBB هو : $P(BBB) = \dfrac{4\times3\times2}{7\times6\times5}$

وبنفس الطريقة ننجز بقية الأسئلة .

تمرين 4:

1. نبين أن $u_{n+1} \succ 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$:

نستعمل البرهان بالترجع .

بما أن $u_0 = 2$

فإن $u_0 \succ 1$

نفترض أن $u_n \succ 1$ ولنبين أن $u_{n+1} \succ 1$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{5u_n}{2u_n+3} - 1 = \frac{5u_n - 2u_n - 3}{2u_n+3} = \frac{3\ u_n - 1}{2u_n+3}$$

حسب افتراض الترجع لدينا $u_n \succ 1$

إذن : $3(u_n - 1) \succ 0$

وبما أن $2u_n + 3 \succ 0$

فإن : $\dfrac{3\ u_n - 1}{2u_n+3} \succ 0$

وبالتالي فإن : $u_{n+1} \succ 1$

إذن : $u_n \succ 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2.أ- نبين أن v_n متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{5}$ ، وكتابة v_n بدلالة n .

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2u_n+3}{5u_n}$$
$$= \frac{5u_n - 2u_n - 3}{5u_n}$$
$$= \frac{3u_n - 3}{5u_n} = \frac{3}{5}\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = \frac{3}{5}v_n$$

وبالتالي فإن $v_{n+1} = \dfrac{3}{5}v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $\dfrac{3}{5}$ ومنه :

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

نعلم أن $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0} = \dfrac{1}{2}$

إذن : $v_n = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- نبين أن $u_n = \dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$:

$\Leftrightarrow v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ $v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$

يعني أن : $\dfrac{1}{u_n} = 1 - v_n$

أي أن : $u_n = \dfrac{1}{1-v_n}$

ومنه فإن : $u_n = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n} = \dfrac{2}{2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}$

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ لأن $-1 \prec \dfrac{3}{5} \prec 1$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{2} = 1$

مسألة

1.1 نحسب $g'(x)$ ، ثم نبين أن g تزايدية على $0,+\infty$ و تناقصية على $-\infty,0$:

لدينا : $g'(x) = e^{2x}\ ' - 2x\ ' = 2e^{2x} - 2$

$= 2\ e^{2x} - 1$

وبما أن الدالة الأسية تزايدية على $\mathbb{R}$:

فإن : $x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow e^{2x} \geq e^0$

$\Rightarrow e^{2x} \geq 1$

$\Rightarrow g'(x) \geq 0$

وبالتالي فإن g تزايدية على $0,+\infty$

وبنفس الطريقة : $x \leq 0 \Rightarrow e^{2x} \leq e^0$

$\Rightarrow g'(x) \leq 0$

وبالتالي فإن g تناقصية على $-\infty,0$

2. استنتاج :
نستنتج من س1. جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$
كما أن g(0) قيمة دنوية ل g على $\mathbb{R}$.
إذن :

x	$+\infty$	0	$-\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	↘	1	↗

وبالتالي فإن : $g(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ومنه : $g(x) \succ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

II – 1. أ- نبين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$:

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}-2x)=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-\lim_{x\to-\infty} 2x=0+\infty=+\infty$

وبالتالي : $\lim_{x\to-\infty}\ln(e^{2x}-2x)=+\infty$

(لأن $\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ بوضع $X=e^{2x}-2x$) لكل x من $\mathbb{R}^*$:

ب- التحقق من أن $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{x}=\frac{e^{2x}-2x}{x}\times\frac{\ln\left(e^{2x}-x\right)}{e^{2x}-2x}$$

$$=\left(\frac{e^{2x}}{x}-\frac{2x}{x}\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$$

$$=\left(\frac{e^{2x}}{x}-2\right)\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$$

ج- نبين أن $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$$

(نضع : $t=e^{2x}-2x$)

$t\to+\infty$ عندما يؤول x إلى $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\times0=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2\times0=0$$

د- نبين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا :

النتيجة $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ تعني أن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل.

2. أ-

حسب I . 2. لدينا: $g(x)\succ0$ $\quad\forall x\in\left]0,+\infty\right[$

ومنه فإن : $e^{2x}-2x\succ0$

أي أن : $\frac{e^{2x}-2x}{e^{2x}}\succ0$

لأن $e^{2x}\succ0$ ومنه : $1-\frac{2x}{e^{2x}}\succ0$

ولدينا : $f(x)=\ln\left[e^{2x}\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)\right]$

باستعمال النتائج التالية:

$\ln\left(a\times b\right)=\ln a+\ln(b)$

لكل a و b من $\left]0,+\infty\right[$

و $\ln\left(e^{t}\right)=t$ $\quad\forall t\in\mathbb{R}$

نجد :

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}\right)+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

$$f(x)=2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

ب- استنتاج :

بما أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty \Rightarrow \lim \frac{2x}{e^{2x}} = 0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right) = 0$

وبالتالي فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$

ج- نبين أن المستقيم الذي معادلته y = 2x مقارب مائل للمنحنى(C) بجوار $+\infty$:

بما أن : $f(x)-2x = \ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right) \quad \forall x \in \left]0,+\infty\right[$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x)-2x\right] = 0$

وبالتالي فإن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (D) معادلته : y = 2x

د- نبين أن $f(x)-2x \leq 0$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$:

بما أن: $\frac{2x}{e^{2x}} \geq 0 \quad \forall x \in \left]0,+\infty\right[$

فإن : $\frac{-2x}{e^{2x}} \leq 0$ أي أن : $1-\frac{2x}{e^{2x}} \leq 1 \quad \forall x \geq 0$

وبالتالي فإن : $\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right) \leq 0$ (لأن $0 \prec X \leq 1 \Rightarrow \ln X \leq 0$)

إذن : $f(x)-2x \leq 0 \quad \forall x \in \left]0,+\infty\right[$ وهذا يعني أن (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $\left]0,+\infty\right[$

2. أ- نبين أن $f'(x) = \frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$:

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \ln\left[g(x)\right]$

إذن : $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$

ب- دراسة إشارة f'(x) و جدول تغيرات f :

درسنا سابقا إشارة $2(e^{2x}-1)$ في 1. I

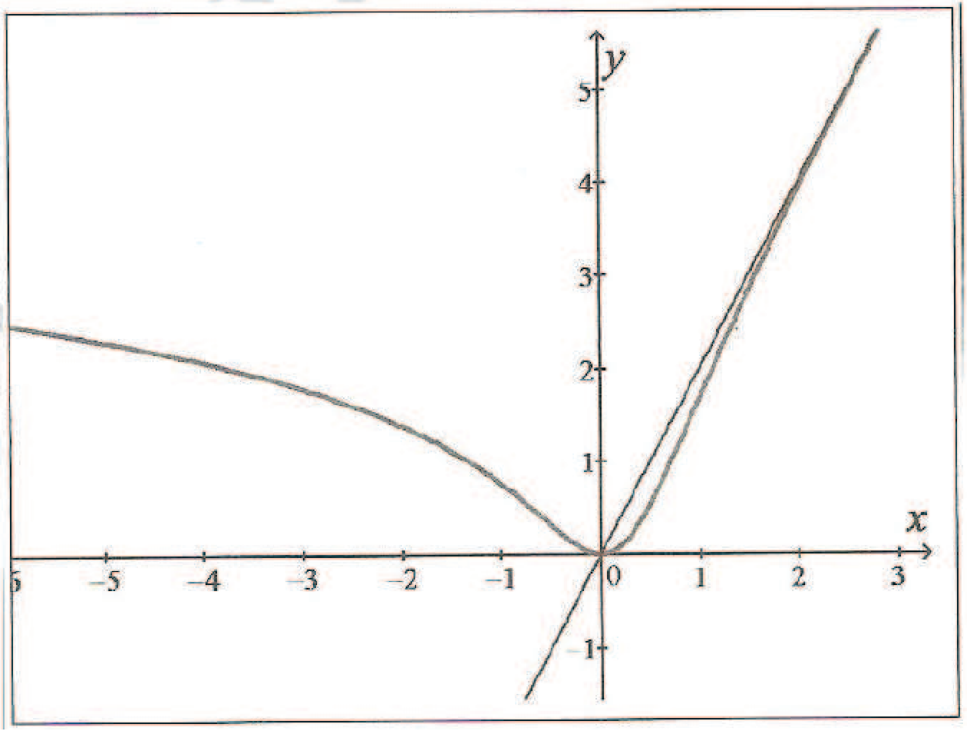
ونعلم أن $g(x) \succ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

إذن إشارة f'(x) هي نفسها إشارة g'(x)

جدول تغيرات f :

x	$+\infty$		0		$-\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4. إنشاء (D) و (C) في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$:



التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A\left(-2,2,8\right)$ و $B\left(6,6,0\right)$ و $C\left(2,-1,0\right)$ و $D\left(0,1,-1\right)$ و $\left(S\right)$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1. لدينا : $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&0\\0&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$. إذن مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ هو $\left(1,2,2\right)$.

لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفضاء. لدينا : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ متجهة منظمية على المستوى $\left(OCD\right)$. إذن :

$$M\in\left(OCD\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\left(\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow x+2y+2z=0$$

وبالتالي فإن $x+2y+2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $\left(OCD\right)$.

2. لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفضاء. لدينا :

$$M\in\left(S\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2-x\\2-y\\8-z\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\6-y\\-z\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(-2-x\right)\left(6-x\right)+\left(2-y\right)\left(6-y\right)+\left(8-z\right)\left(-z\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-8y-8z=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2+\left(z-4\right)^2=36$$

وبالتالي فإن $\left(S\right)$ فلكة مركزها $\Omega\left(2,4,4\right)$ وشعاعها $R=\sqrt{36}=6$.

3. أ- مسافة النقطة $\Omega\left(2,4,4\right)$ عن المستوى $\left(OCD\right)$ هي : $d\left(\Omega,\left(OCD\right)\right)=\dfrac{\left|2+\left(2\times4\right)+\left(2\times4\right)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{18}{3}=6=R$.

ب- بما أن $d\left(\Omega,\left(OCD\right)\right)=R$، فإن المستوى $\left(OCD\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$.

جـ- لدينا : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}=\left(-2\times6\right)+\left(2\times6\right)+\left(8\times0\right)=-12+12=0$.

بما أن : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-12+12=0$، فإن : $O\in\left(S\right)$. ولدينا : $O\in\left(OCD\right)$.

وبما أن المستوى $\left(OCD\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$، فإن O هي نقطة تماس الفلكة $\left(S\right)$ والمستوى $\left(OCD\right)$.

التمرين الثاني :

نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=2-2i$ و $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $c=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

1. لدينا : $a=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]=\boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

و لدينا : $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\left[1,\pi-\frac{\pi}{6}\right]=\left[1,\frac{5\pi}{6}\right]=\boxed{e^{i\frac{5\pi}{6}}}$.

2. نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$.

أ- ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R. لدينا :

$z'=R(z)\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{5\pi}{6}}z\Leftrightarrow\boxed{z'=bz}$.

ب- لتكن C'، صورة النقطة A بالدوران R، لحقها c'. لدينا :

$$c'=ba=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(2-2i\right)=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i+i+1=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i=c.$$

إذن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R.

3. حسب السؤال (2.ب-)، لدينا : $c=ba$. إذن :

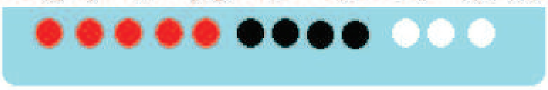
$$\begin{aligned}\arg(c) &\equiv \arg(ab) \quad [2\pi]\\ &\equiv \arg(a)+\arg(b) \quad [2\pi]\end{aligned}$$

وحسب السؤال 1.، نستنتج أن :

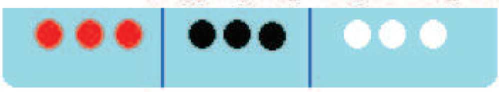
$$\begin{aligned}\arg(c) &\equiv \arg(a)+\arg(b) \quad [2\pi]\\ &\equiv -\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]\\ &\equiv \frac{7\pi}{12} \quad [2\pi]\end{aligned}$$

التمرين الثالث :

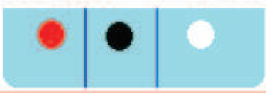
يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 5 كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا وتآنيا ثلاث كرات من الصندوق . وهذا يدل على السحب الآني (التأليفات) في حالة فرضية تساوي الاحتمال.



1. نعتبر الحدثين التاليين : A :« الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون »



و B :« الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى »



احتمال الحدث A هو : $\boxed{\frac{3}{44}} = \frac{15}{220} = \frac{10+4+1}{220} = \frac{C_5^3+C_4^3+C_3^3}{C_{12}^3} = p(A)$.

احتمال الحدث B هو : $\boxed{\frac{3}{11}} = \frac{60}{220} = \frac{C_5^1C_4^1C_3^1}{C_{12}^3} = p(B)$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها.

أ- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 1 و 2 و 3 . ولدينا : $X(\Omega)=\{1,2,3\}$.

ب- لدينا : $p(X=1)=p(A)=\frac{3}{44}$ و $p(X=3)=p(B)=\frac{3}{11}$

و : $$p(X=2)=1-\left(p(X=1)+p(X=3)\right)=1-\left(\frac{3}{44}+\frac{3}{11}\right)=1-\frac{15}{44}=\frac{29}{44}$$

أو : $$p(X=2)=\frac{C_3^2C_9^1+C_4^2C_8^1+C_5^2C_7^1}{C_{12}^3}=\frac{(3\times9)+(6\times8)+(10\times7)}{220}=\frac{145}{220}=\frac{29}{44}$$

$\left(RR\overline{R} \text{ أو } NN\overline{N} \text{ أو } BB\overline{B} \right)$

قانون احتمال المتغير العشوائي X :

x_k	1	2	3
$p_k=p(X=x_k)$	$\frac{3}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{3}{11}$

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_kp_k=\left(1\times\frac{3}{44}\right)+\left(2\times\frac{29}{44}\right)+\left(3\times\frac{3}{11}\right)=\frac{97}{44}\approx 2,2$$

التمرين الرابع :

نضع : $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}\,dx$ و $J=\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)\,dx$.

1. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$. لدينا : $\frac{x}{x+3}=\frac{x+3-3}{x+3}=1-\frac{3}{x+3}$.

ب- حساب التكامل I :

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx=\int_{-2}^{-1}1-\frac{3}{x+3}dx=\left[x-3\ln|x+3|\right]_{-2}^{-1}=(-1-3\ln2)-(-2-3\ln1)=\boxed{1-3\ln2}$$

2. حساب التكامل J :

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)\,dx=\int_{-2}^{-1}x'\ln(2x+6)\,dx\\
&= \left[x\ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}x\left(\ln(2x+6)\right)'dx\\
&= -\ln4+2\ln2-\int_{-2}^{-1}\frac{2}{2x+6}\,dx\\
&= -\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x+3}\,dx\\
J &= -I = -1+3\ln2
\end{aligned}$$

التمرين الخامـــــــــــس :

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=2\ln\left(e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\right)$ ، و ليكن $\mathscr{C}$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I. 1. ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

✓ $e^{2x}-2\sqrt{e^{x}}+2=e^{2x}-2\sqrt{e^{x}}+1+1=\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1$.

✓ **حيز تعريف الدالة f :** بما أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ e^{2x}-2\sqrt{e^{x}}+2=\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1>0$ ، فإن :

$\mathscr{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2>0\right\}=\mathbb{R}$.

✓ لكل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2>0\Rightarrow\dfrac{e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2}{e^{x}}>0\Rightarrow1-\dfrac{2}{\sqrt{e^{x}}}+\dfrac{2}{e^{x}}>0$. إذن :

$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ 1-\dfrac{2}{\sqrt{e^{x}}}+\dfrac{2}{e^{x}}>0$.

2. لدينا :

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1\right)=+\infty$ ، لأن :

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1=+\infty$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$.

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1\right)=2\ln2=\boxed{\ln4}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x=0$ ، ومنه نستنتج أن

المنحنى $\mathscr{C}$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $-\infty$ معادلته : $y=\ln4$.

3. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$f'(x)=2\ln\left(\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1\right)'=2\frac{\left(\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1\right)'}{\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1}=2\frac{2\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)'\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)}{\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1}=2\frac{\cancel{2}\dfrac{e^{x}}{\cancel{2}\sqrt{e^{x}}}\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)}{\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1}$$

$$f'(x)=\boxed{\frac{2\sqrt{e^{x}}\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)}{\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1}}$$

ولدينا : $f'(0)=\dfrac{2\sqrt{e^{0}}\left(\sqrt{e^{0}}-1\right)}{\left(\sqrt{e^{0}}-1\right)^{2}+1}=\boxed{0}$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $\sqrt{e^{x}}-1=\dfrac{e^{x}-1}{\sqrt{e^{x}}+1}$. إذن إشارة $\sqrt{e^{x}}-1$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $e^{x}-1$. ولدينا :

$x\geq0\Rightarrow e^{x}\geq1\Rightarrow e^{x}-1\geq0$ و $x\leq0\Rightarrow e^{x}\leq1\Rightarrow e^{x}-1\leq0$. ومنه نستنتج أن :

$\forall x\in\left[0,+\infty\right[\ :\ \sqrt{e^{x}}-1\geq0$ و $\forall x\in\left]-\infty,0\right]\ :\ \sqrt{e^{x}}-1\leq0$.

بما أن $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$: $\forall x\in\mathbb{R}$ ، فإن إشارة $f'(x)$ على هي إشارة $\sqrt{e^x}-1$.

وعليه فإن : $\forall x\in\left[0,+\infty\right[\ :\ f'(x)\geq 0$ و $\forall x\in\left]-\infty,0\right]\ :\ f'(x)\leq 0$.

إذن : f تزايدية على المجال $\left[0,+\infty\right[$ وتناقصية على المجال $\left]-\infty,0\right]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)=2\ln\left(e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)\right)=2\ln\left(e^x\right)+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

$$f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

ب- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=\boxed{0}$ ، فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى $\mathscr{C}$ بجوار $+\infty$.

5. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)=e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2=e^x-3\sqrt{e^x}+2$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $\sqrt{e^x}-2=\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x}+2}$. إذن إشارة $\sqrt{e^x}-2$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة e^x-4 .

ولدينا : $x=\ln 4 \Leftrightarrow e^x=4 \Leftrightarrow e^x-4=0$. ومنه فإن :

x	$-\infty$		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$	0	$+$	

ونعلم إشارة $\sqrt{e^x}-1$ على $\mathbb{R}$ حسب السؤال (3. ب-) . إذن :

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{e^x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$		$+$		$-$		$+$	

جـ- حسب السؤال أعلاه ، لكل x من المجال $[0,\ln 4]$ ، لدينا :

$$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)\leq 0 \Rightarrow e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2\leq 0 \Rightarrow e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}$$

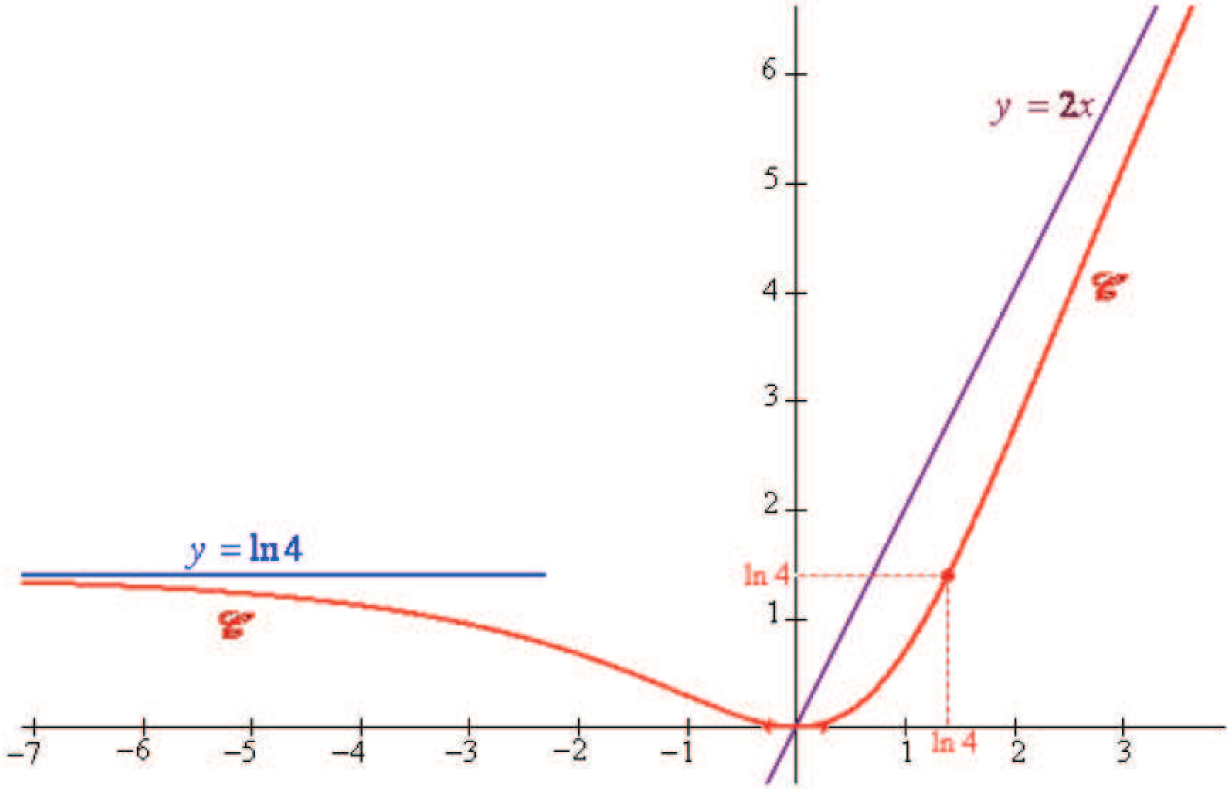
د- حسب السؤال أعلاه ، لكل x من المجال $[0,\ln 4]$ ، لدينا :

$$e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}\Rightarrow\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq\ln\left(\sqrt{e^x}\right)\Rightarrow\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq\frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq x \;\Rightarrow f(x)\leq x$$

إذن : $f(x)\leq x \;:\; \forall x\in[0,\ln 4]$.

6. إنشاء المنحنى $\mathscr{C}$:



II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad ; \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. لدينا :

✓ من أجل $n=0$ ، $u_0=1$. إذن : $0\leq u_0\leq\ln 4$.

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$. نعترض أن : $0\leq u_n\leq\ln 4$ ، ونبين أن : $0\leq u_{n+1}\leq\ln 4$.

نعلم أن f تزايدية على المجال $[0,\ln 4]$. إذن :

$$0\leq u_n\leq\ln 4 \Rightarrow f(0)\leq f(u_n)\leq f(\ln 4) \Rightarrow 0\leq u_{n+1}\leq\ln 4.$$

✓ وبالتالي فإن : $\forall n\in\mathbb{N} \;:\; 0\leq u_n\leq\ln 4$.

2. نعلم أن : $\forall x \in [0,\ln 4] \ : f(x) \le x$ ، وأن : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ 0 \le u_n \le \ln 4$.

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : f(u_n) \le u_n$. أي : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_{n+1} \le u_n$.

وبالتالي فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3. لدينا : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0 . إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

وبما أن :

- f متصلة على المجال $[0,\ln 4]$.
- f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0,\ln 4]$.

إذن : $f([0,\ln 4]) = [f(0), f(\ln 4)] = [0,\ln 4]$.

- $u_0 = 1 \in [0,\ln 4]$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها $l \in \mathbb{R}$.

فإن النهاية l تحقق الشرطان التاليان : $f(l) = l$ و $l \in [0,\ln 4]$.

ولدينا :

$$\begin{aligned}
f(l) = l &\Leftrightarrow 2\ln\left(e^l - 2\sqrt{e^l} + 2\right) = l \\
&\Leftrightarrow \ln\left(e^l - 2\sqrt{e^l} + 2\right) = \frac{l}{2} \\
&\Leftrightarrow e^l - 2\sqrt{e^l} + 2 = \sqrt{e^l} \\
&\Leftrightarrow e^l - 3\sqrt{e^l} + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{e^l} - 1\right)\left(\sqrt{e^l} - 2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{e^l} = 1 \ \text{أو} \ \sqrt{e^l} = 2 \\
&\Leftrightarrow e^l = 1 \ \text{أو} \ e^l = 4 \\
&\Leftrightarrow l = 0 \ \text{أو} \ l = \ln 4
\end{aligned}$$

وبما أن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ، فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_n \le u_0 = 1$. إذن : $l \le 1$. ومنه فإن : $l = 0$

خلاصة : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2009 -

شعبة العلوم التجريبية بمسالكها و شعبة العلوم و التكنولوجيات بمسلكيها

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطة $A(2,2,-1)$ و المستوى (P) الذي معادلته هي $2x+y+2z-13=0$ و الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1,0,1)$ وشعاعها 3 .

1) أ- بين أن $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ هي معادلة ديكارتية للفلكة (S) وتحقق من أن A تنتمي إلى (S).

الفلكة مركزها $\Omega(1,0,1)$ و شعاعها 3 اذن معادلتها تكتب على شكل

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1=9$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0}$$

و بما ان $2^2+2^2+(-1)^2-2\times2-2\times(-1)-7=7-7=0$ فان $A\in(S)$

ب- احسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) ثم استنتج أن المستوى (P) مماس للفلكة (S).

$$\boxed{d(\Omega,(P))=\frac{|2\times1+0+2\times1-13|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3}$$

2) ليكن (D) المستقيم المار من النقطة A والعمودي على المستوى (P) .

أ- بين ان $\vec{u}(2,1,2)$ متجهة موجهة للمستقيم (D) و أن $(6,-6,-3)$ هو مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$.

من معادلة المستوى واضح ان المتجهة $\vec{u}(2,1,2)$ منظمية عليه. و المستقيم (D) عمودي ايضا على المستوى.

نستنتج اذن ان المتجهة $\vec{u}(2,1,2)$ موجهة للمستقيم (D)

$$\begin{cases}\overrightarrow{\Omega A}(1,2,-2)\\ \vec{u}(2,1,2)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\-2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\vec{k}=6\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}$$

$\boxed{\text{اذن } (6,-6,-3) \text{ هو مثلوث احداثيات } \overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}}$

ب- احسب $\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ ثم استنتج أن المستقيم (D) مماس للفلكة (S) في A .

$$\boxed{\frac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3}$$

و نعلم ان $d(\Omega,(D))=\dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

مركز الفلكة يبعد عن المستقيم بقيمة الشعاع اذن (D) مماس للفلكة (S)

التمرين الثاني (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+25=0$

المميز المختصر للمعادلة هو $\Delta'=(-3)^2-25=-16\neq0$

المعادلة تقبل اذن حلين مترافقين $\boxed{z_1=3+4i \quad \text{و} \quad z_2=3-4i}$

2) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3+4i$ و $b=3-4i$ و $c=2+3i$ و $d=5+6i$.

أ- احسب $\frac{d-c}{a-c}$ ثم استنتج أن النقط A و C و D مستقيمية .

$$\boxed{\frac{d-c}{a-c}=\frac{5+6i-(2+3i)}{3+4i-(2+3i)}=\frac{3+3i}{1+i}=3}$$

نستنتج ان $\overline{(\overline{CA},\overline{CD})}=Arg\frac{d-c}{a-c}=0[2\pi]$ اي ان النقط A و C و D مستقيمية

ب- بين أن العدد $p=3+8i$ هو لحق النقطة P صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه B ونسبته $\frac{3}{2}$

لدينا $h(A)=P \Leftrightarrow \overline{BP}=\frac{3}{2}\overline{BA} \Leftrightarrow p=b+\frac{3}{2}(a-b)$

اذن $\Leftrightarrow p=3-4i+\frac{3}{2}(3+4i-3+4i)=3-4i+12i$

و منه $\Leftrightarrow \boxed{p=3+8i}$

ج- اكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{d-p}{a-p}$ ثم استنتج أن $\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)$

لدينا $\frac{d-p}{a-p}=\frac{5+6i-(3+8i)}{3+4i-(3+8i)}=\frac{2-2i}{-4i}=\frac{2i+2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

اذن $\boxed{\frac{d-p}{a-p}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

نستنتج $\boxed{\overline{(\overline{PA},\overline{PD})}=Arg\quad\frac{\pi}{4}[2\pi]}$

التمرين الثالث (3 ن)

يحتوي صندوق على سبع كرات سوداء و كرتين بيضاوين. (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس)

نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين.

1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

القيم التي ياخذها المتغير العشوائي هي

0 باعتبار سحب كرتين بيضاوين

1 باعتبار سحب كرة بيضاء و كرة سوداء

2 باعتبار سحب كرتين سوداوين

2) بين أن : $P(X=0)=\frac{1}{36}$ و $P(X=1)=\frac{7}{18}$.

$$\boxed{p(X=1)=2\left(\frac{A_2^1\times A_7^1}{A_9^2}\right)=\frac{2\times 2\times 7}{9\times 8}=\frac{7}{18}}$$

$$\boxed{p(X=0)=\frac{A_2^2}{A_9^2}=\frac{2\times 1}{9\times 8}=\frac{1}{36}}$$

3) أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

$$\boxed{p(X=2)=\frac{A_7^2}{A_9^2}=\frac{7\times 6}{72}=\frac{7}{12}}$$

نلخص في الجدول التالي

X	0	1	2
$p(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{12}$

$$\boxed{E(X)=0\times\frac{1}{36}+1\times\frac{7}{18}+2\times\frac{7}{12}=\frac{14}{9}}$$

التمرين الرابع (3 ن)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{1+4u_n}{7-2u_n}$ لكل n من IN .

1) تحقق من أن $1-u_{n+1} = \frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ لكل n من IN ثم بين بالترجع أن $1-u_n > 0$ لكل n من IN .

لدينا $$\forall n \in \mathbb{N} : 1-u_{n+1} = 1-\frac{1+4u_n}{7-2u_n} = \frac{7-2u_n-1-4u_n}{7-2u_n} = \frac{6-6u_n}{7-2u_n}$$

اذن $$\Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : 1-u_{n+1} = \frac{6(1-u_n)}{7-2u_n}}$$

و لدينا من اجل القيمة 0 $1-u_0 = 1 \succ 0$ اي ان العبارة محققة

نفترض بالترجع صحتها حتى الدرجة n اي $1-u_n \succ 0$

ونبين انه ايضا لدينا $1-u_{n+1} \succ 0$

لدينا $$1-u_{n+1} = \frac{6(1-u_n)}{7-2u_n}$$

بما ان $1-u_n \succ 0$ فان $6(1-u_n) \succ 0$ و $7-2u_n \succ 0$

اي ان $1-u_{n+1} \succ 0$

خلاصة $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : 1-u_n \succ 0}$$

2) نضع : $v_n = \frac{2u_n-1}{u_n-1}$ لكل n من IN .

أ – بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{6}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

لدينا $$\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}-1} = \frac{2\frac{1+4u_n}{7-2u_n}-1}{\frac{1+4u_n}{7-2u_n}-1} = \frac{10u_n-5}{6u_n-6} = \frac{5}{6} \times \frac{2u_n-1}{u_n-1}$$

اذن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{5}{6}v_n}$ اي ان هذه المتتالية هندسية اساسها $\frac{5}{6}$

و نكتب $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : v_n = v_0\left(\frac{5}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n}$ $\boxed{v_0 = \frac{0-1}{0-1} = 1}$

$\Rightarrow$

ب- بين أن : $u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$ لكل n من IN واستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

لدينا $$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{2u_n-1}{u_n-1} \Leftrightarrow v_n - 2 = \frac{2u_n-1}{u_n-1} - 2 = \frac{1}{u_n-1}$$

اذن $$\Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} : u_n - 1 = \frac{1}{v_n-2} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n-2}+1 = \frac{v_n-1}{v_n-2} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-2}}$$

و بما ان $0 \prec \frac{5}{6} \prec 1$ فان $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ و بالتالي $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{0-1}{0-2} = \frac{1}{2}}$

التمرين الخامس (2 ن)

1) حدد الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto 2x(x^2-1)^{2009}$ على IR وتحقق من أن : $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009}dx = \frac{1}{2010}$.

نعتبر الدالة $x \mapsto \frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010}+k; k\in\mathbb{R}$

لدينا $\left[\frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010}+k\right]' = 2010\times\frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010-1}\times 2x = 2x(x^2-1)^{2009}$

اذن الدوال الاصلية للدالة $2x(x^2-1)^{2009}$ هي الدوال المعرفة بما يلي

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010}+k; k\in\mathbb{R}}$$

من جهة اخرى لدينا

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009}dx = \left[\frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010}+k\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2010}(2-1)^{2010}+k-\frac{1}{2010}(1-1)^{2010}-k = \frac{1}{2010}$$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = 6\ln 3-2$.

لدينا $2x+1 = (x^2+x)'$

اذن $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = \left[(x^2+x)\ln(x+1)\right]_0^2 - \int_0^2 (x^2+x)\frac{1}{x+1}dx$

اي ان $= 6\ln 3 - \int_0^2 xdx = 6\ln 3 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$

و منه $= 6\ln 3 - 2$

التمرين السادس (6 ن)

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- تحقق من أن : $f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$ لكل x من IR .

لدينا $\forall x\in\mathbb{R} : f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) = x\frac{e^{-2x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{-2x}\left(e^{2x}+1\right)} = x\left(\frac{e^0-e^{-2x}}{e^0+e^{-2x}}\right)$

اذن $\boxed{\forall x\in\mathbb{R} : f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)}$

ب- بين أن الدالة f زوجية وأن $f(x)-x = \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ لكل x من IR .

بما ان $Df = \mathbb{R}$ فان $\Rightarrow (x\in Df \Leftrightarrow -x\in Df)$

و لدينا $f(-x) = -x\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right) = f(x)$

اذن الدالة f زوجية

ج - بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0$ ثم استنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

بما ان $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}=0$ فان

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)=+\infty\left(\frac{1-0}{1+0}\right)=+\infty}$$

من جهة اخرى

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\lim_{\substack{X\to-\infty\\X=-2x}}\frac{Xe^{X}}{1+e^{X}}=\frac{0}{1+0}=0}$$

و لدينا

$$f(x)-x=x\left(\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)-x=\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

اذن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0$$

و منه المستقيم $y=x$ مقارب لمنحنى الدالة بجوار زائد ما لا نهاية

2) بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[0,+\infty[$.

بما ان $\forall x\geq 0: f(x)-x=\frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}\leq 0$ فان المنحنى تحت المقارب على هذا المجال

3) أ- بين أن : $f'(x)=\frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ لكل x من IR وتحقق من أن : $f'(0)=0$.

$$\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=\left[x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)\right]'=\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)+x\frac{\left(e^{2x}-1\right)'\left(e^{2x}+1\right)-\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}+1\right)'}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+x\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+\frac{4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=\frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}} \qquad \boxed{f'(0)=\frac{1-1+0}{4}=0}$$

ب- بين أن : $e^{4x}-1\geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$ ثم استنتج أن $e^{4x}-1+4xe^{2x}\geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$.

نعلم ان الدالة الأسية تزايدية قطعا. اذن

$$\forall x\geq 0: 4x\geq 0\Rightarrow e^{4x}\geq e^{0}\Rightarrow e^{4x}\geq 1\Rightarrow e^{4x}-1\geq 0$$

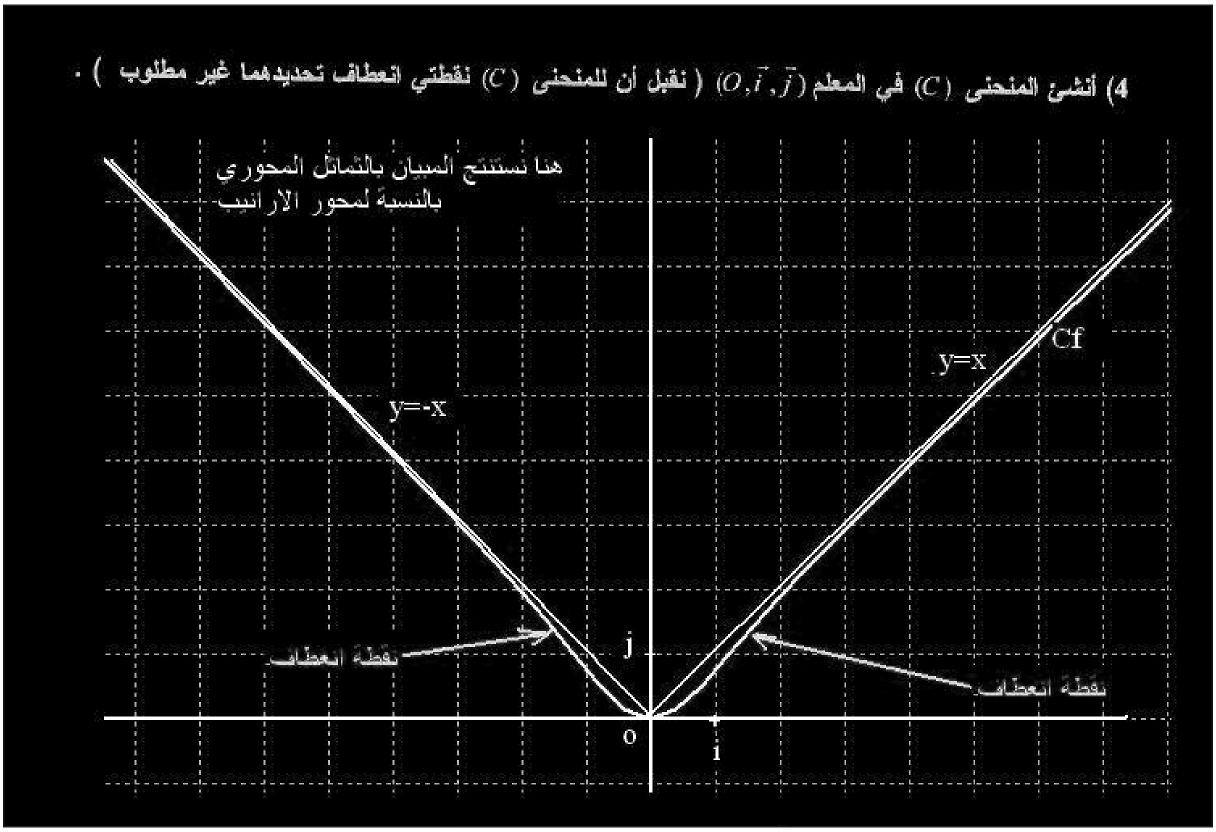
و لدينا $\forall x\geq 0:\ 4xe^{2x}\geq 0$

اذن

$$\boxed{\forall x\geq 0:\quad e^{4x}-1+4xe^{2x}\geq 0}$$

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$


4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف تحديدهما غير مطلوب) .
هنا نستنتج المبيان بالتماثل المحوري
بالنسبة لمحور الاراتيب
y=-x
y=x
Cf
j
نقطة انعطاف
نقطة انعطاف
o
i