ثانوية موسى بن نصير	فرض محروس رقم 02	2 بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الثانية 2014/2013	مدة الإنجاز : أربع ساعات
		ذ : عبدالله بن الختير

■ **التمرين رقم 01:** (03 نقط)

⇦ نعتبر المجموعة : $G=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$.

0,25 **1)**- بين أن : $(\forall(z,z')\in G\times G);1+z\overline{z'}\neq 0$.

2)- لتكن (z,z') من $G\times G$ ، نضع : $z*z'=\dfrac{z+z'}{1+z\overline{z'}}$.

0,5 أ- بين أن : $(\forall(z,z')\in G\times G);\left(\left|1+z\overline{z'}\right|^2-\left|z+z'\right|^2\right)=\left(1-|z|^2\right)\times\left(1-|z'|^2\right)$.

0,25 ب- إستنتج أن * قانون تركيب داخلي في G .

1 ج- بين أن $(G,*)$ زمرة غير تبادلية .

3)- نضع : $H_\theta=\{z=ae^{i\theta};a\in]-1,1[\}$ ، حيث $\theta\in\mathbb{R}$.

1 ▪ بين أن H_θ جزء مستقر من $(G,*)$ و أن $(H_\theta,*)$ زمرة تبادلية .

■ **التمرين رقم 02:** (03 نقط)

⇦ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(E_m):z^2-2mz-2(1+i)=0$ ، حيث $m\in\mathbb{C}$.

و لتكن في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ النقط :

$M(m)$ و $N(2m)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ ، حيث z_1 و z_2 هما حلي المعادلة (E_m) .

0,5 **1)**- أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) من أجل $m=i\sqrt{2}$.

0,25 ب- بين في هذه الحالة أن المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في O .

2)- نضع : $\Delta'=\dfrac{1}{4}\Delta$ ، حيث Δ هو مميز المعادلة (E_m) و لتكن (H) مجموعة النقط $M(m)$ التي يكون لأجلها المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في O .

0,75 أ- بين أن المثلث OM_1M_2 يكون قائم الزاوية في O إذا و فقط إذا كان : $|m|^2=|\Delta'|$.

0,5 ب- إستنتج أن معادلة ديكارتية للمنحنى (H) هي : $x^2-y^2+2xy+2=0$.

3)- نفترض أن : $M(m)\in(H)$.

0,5 أ- بين أن الرباعي OM_1NM_2 مستطيل .

0,5 ب- اعط طريقة هندسية لإنشاء النقطتين M_1 و M_2 علما عمدة للعدد العقدي z_1 .

abdellah belkhatir

■ **التمرين رقم 03:** (1,5 نقطة)

0,75 **1)**- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 3x-2y=5$.

2)- ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.

0,75 ▪ حدد أصغر عدد صحيح طبيعي $x \geq 2014$ يحقق : $(F): y^2 \equiv 15x[41]$.

■ **التمرين رقم 04:** (03 نقط)

⇦ ليكن a من $\mathbb{N}^*$ بحيث $4a^2+1$ غير أولي .

1)- ليكن $p \geq 2$ قاسما أوليا للعدد $4a^2+1$.

0,25 أ- تحقق من أن : $p \geq 3$.

0,5 ب- بين أن : $(2a)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$.

0,75 ج- بين أن : $(2a) \wedge p = 1$ ، ثم إستنتج أن : $(2a)^{p-1} \equiv 1[p]$.

0,5 د- باستعمال ما سبق ، بين أن : $p \equiv 1[4]$.

0,5 **2)**- بين أنه إذا كان d قاسما فعليا موجبا للعدد $4a^2+1$ فإن : $d \equiv 1[4]$.

0,5 **3)**- إستنتج أنه : $\left(\exists (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right); 4a^2+1 = (4m+1)\times(4n+1)$.

■ **التمرين رقم 05:** (2,5 نقطة)

⇦ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (31)^k$.

0,25 **1)**- أ- تحقق أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 30 \times S_n = 31^n - 1$.

0,5 ب- باستعمال مبرهنة بوزو ، بين أن : $31 \wedge S_{2014} = 1$.

0,5 ج- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{Z}); 31x \equiv 1[S_{2014}] \Leftrightarrow x \equiv 31^{2013}[S_{2014}]$.

0,75 **2)**- أ- ليكن $p \geq 7$ عددا أوليا ، بين أن : $S_p \equiv 1[p]$.

0,5 ب- نقبل أن 2011 عدد أولي ، حدد باقي القسمة الأقليدية للعدد S_{2012} على 2011 .

abdellah belkhatir

■ **التمرين رقم 06:** (4,75 نقطة)

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right);\mathrm{F}(x)=\int_x^{3x}\frac{e^{-t}}{t}dt \text{ و } \mathrm{F}(0)=\ln 3 .$$

0,25 **1)**- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);e^{-3x}\ln 3\le \mathrm{F}(x)\le e^{-x}\ln 3$

0,25 ب- بين أن : $\left(\forall x\in\left]-\infty,0\right[\right);e^{-x}\ln 3\le \mathrm{F}(x)\le e^{-3x}\ln 3$.

0,5 **2)**- أ- بين أن الدالة F متصلة في الصفر .

0,5 ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathrm{C_F})$ بجوار كل من $+\infty$ و $-\infty$.

3)- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right);\mathrm{f}(x)=\frac{e^{-x}-1}{x} \text{ و } \mathrm{f}(0)=-1 .$$

0,5 أ- بين أن f متصلة على $\mathbb{R}$.

0,5 ب- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right);\dfrac{\mathrm{F}(x)-\ln 3}{x}=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{3x}\mathrm{f}(t)dt$.

0,5 ج- إستنتج أن الدالة F قابلة للإشتقاق في الصفر محددا $\mathrm{F}'(0)$.

0,75 **4)**- أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$ و $\left]-\infty,0\right[$ وأن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^*\right);\mathrm{F}'(x)=\dfrac{e^{-2x}-1}{xe^{x}}$.

0,5 ب- إستنتج رتابة الدالة F على $\mathbb{R}$ ، ثم ضع جدول تغيراتها .

0,5 **5)**- أرسم المنحنى $(\mathrm{C_F})$ في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (مبرزا المماس عند أصل المعلم) .

■ **التمرين رقم 07:** (4,25 نقطة)

⇦ لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n=\displaystyle\int_1^2\left(1-e^{\frac{-1}{nx}}\right)dx$ و $v_n=n\times u_n$.

1)- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\mathrm{f}(x)=e^{x}-(1+x) .$$

0,5 أ- بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);\mathrm{f}(x)\ge 0$.

0,25 ب- إستنتج أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);e^{-x}\le\dfrac{1}{1+x}$.

0,75 ج- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ ، بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);1-\dfrac{1}{nx}\le e^{-\frac{1}{nx}}\le 1-\dfrac{1}{1+nx}$.

abdellah belkhatir

0,5 **2)**- أ- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\frac{1}{n}\times\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\le u_n\le\frac{\ln 2}{n}$.

0,5 ب- إستنتج نهايتي كل من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3)- لتكن F_n الدالة المعرفة بما يلي :

$F_n(x)=\int_n^{nx}\left(1-e^{\frac{-1}{t}}\right)dt$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

0,25 أ- تحقق من أن : $D_{F_n}=]0,+\infty[$.

0,5 ب- بين أن الدالة F_n قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن :

$\left(\forall x\in]0,+\infty[\right);F_n'(x)=n\left(1-e^{-\frac{1}{nx}}\right)$.

0,5 ج- إستنتج أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);u_n=\frac{1}{n}\int_n^{2n}\left(1-e^{\frac{-1}{t}}\right)dt$.

0,5 د- ماذا تمثل حدود كل من المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ؟

■ تمرين إضافي:

⇦ نعتبر المجموعة : $G=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix};(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1)- بين أن G جزء مستقر من $(IM_2(\mathbb{R}),+)$ و من $(IM_2(\mathbb{R}),\times)$.

2)- لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ ، نضع : $f(z)=M(a,b)$.

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(G,+)$ و من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(G,\times)$.

ب- إستنتج بنية كل من $(G,+)$ و $(G^*,\times)$ (حيث $G^*=G-\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$) .

3)- نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ ، أحسب A^n لكل n من $\mathbb{N}^*$.

4)- حل في المجموعة G المعادلة : $X^3=-I_2$ (حيث $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$) .

5)- نعتبر المجموعة : $H=\left\{M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix};\theta\in\mathbb{R}\right\}$.

- بين أن H زمرة جزئية للزمرة $(G^*,\times)$.

إنتهى الموضوع .

abdellah belkhatir

abouzakariyamaths@gmail.com