Durée : 02 heures

تمرين رقم 01: (09 نقط)

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$u_0=3$ و $(\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}=3-\frac{2}{u_n}$.

1)- أ- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n>2$. **1**

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1).(2-u_n)}{u_n}$ و استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا . **1,5**

2)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_{n+1}-2\le\frac{1}{2}(u_n-2)$. **1**

ب- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n-2\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها . **1,5**

3)- لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $v_n=\frac{u_n-2}{u_n-1}$.

أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), v_n=\frac{1}{2^{n+1}}$. **1,5**

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n=2+\frac{1}{2^{n+1}-1}$ ، ثم استنتج مرة أخرى نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **1**

4)- لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $S_n=\frac{1}{u_0-1}+\frac{1}{u_1-1}+\frac{1}{u_2-1}+...+\frac{1}{u_n-1}$.

✓ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}), S_n=n+\frac{1}{2^{n+1}}$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **1,5**

تمرين رقم 02: (11 نقطة)

⇦ لتكن f الدالة المعرفة على $I=]0,+\infty[$ بما يلي :

$(\forall x\in I), f(x)=2x-\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$.

1)- أ- بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. **0,5**

ب- بين أن : $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مقاربا عموديا ينبغي تحديده . **1**

Durée : 02 heures

2)- أ- بين أن (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (Δ) معادلته : $y=2x-1$. **1**

ب- بين أن المنحنى (C_f) تحت مقاربه المائل (Δ) على I . **0,5**

3)- أ- بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن :

$(\forall x\in I), f'(x)=2+\frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f . **1,5**

ب- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول $x_0=1$. **0,5**

4)- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع المحور (Ox) في نقطة وحيدة ينبغي تحديد أفصولها . **1**

ب- ارسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (مبرزا المماس (T)) . **1,25**

4)- أ- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$. **0,5**

ب- بين أن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{2}{7}$. **1**

ج- ارسم المنحنى $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (استعمل لونا مغايرا للون (C_f)) . **1,25**

● تمارين إضافية:

تمرين إضافي رقم 01: (1,5 نقطة)

✓ احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}), u_n=\frac{3^n-5^n}{2^n+4^n}$. **1,5**

تمرين إضافي رقم 02: (3,5 نقطة)

⇦ ليكن $a\in\mathbb{R}^{*+}$ و $q\in]-1,0[\cup]0,1[$.

و لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتاليتين المعرفتين بما يلي :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*), u_n=\frac{n}{(1+a)^n}$ و $(\forall n\in\mathbb{N}^*), v_n=n.q^n$.

1. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*), (1+a)^n\ge\frac{n(n-1)}{2}.a^2$ ، ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. **1**
2. احسب نهاية المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ معللا جوابك . **1**
3. نضع : $S_n=\sum_{k=1}^{n} k.q^{k-1}$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

✓ بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*), S_n=\frac{n.q^{n+1}-(n+1).q^n+1}{(1-q)^2}$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. **1,5**

Fin du sujet

Bon courage et bonne chance