Lycée moussa bno noussaer - khémisset	Devoir maison n° 01 1^er tranche 2016-2017	1^er bac sc math int Abdellah belkhatir

Exercice n° 01 :

1)- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) et l'inéquation (I) :

$$(E): \sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}=1 \ , \ (I): x-1\leq\sqrt{x+5} \ .$$

2)- résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $(S):\begin{cases} x=1-\sqrt{y} \\ y=1-\sqrt{x} \end{cases}.$

Exercice n° 02 :

Montrer que, quels que soient les réels positifs a , b et c :

1)- $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$.

2)- $\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ac}+\dfrac{c^3}{ab}\geq a+b+c$ et $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 3$ (avec $a,b,c>0$).

Exercice n° 03 :

1)- trouver tous les entiers relatifs x vérifiant : $(I):\left|\dfrac{4x}{x^2-2x-1}\right|\geq 1$.

2)- en déduire tous les couples (x,y) d'entiers relatifs vérifiant :

$$(E): 1+x^2y=x^2+2xy+2x+y \ .$$

Exercice n° 04 :

Soit f une fonction numérique définie sur l'ensemble : $D=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

1)- quel est le domaine de définition de la fonction :

$$g: x\mapsto f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right).$$

2)- on suppose que pour tout x réel différent de 1 et -1 on ait :

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x \ .$$

✓ Démontrer que f est définie par : $f(x)=\dfrac{4x}{1-x^2}-\dfrac{x}{2}$.

Exercice n° 05 :

1)- déterminer une fonction polynôme du second degré $P(x)$ tel que pour tout entier $k\geq 2$:

$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\times\frac{P(k)}{P(k-1)} \ .$$

2)- on pose pour tout $n\geq 2$,

$$A(n)=\frac{n^3-1}{n^3+1}\times\frac{(n-1)^3-1}{(n-1)^3+1}\times\frac{(n-2)^3-1}{(n-2)^3+1}\times\ldots\times\frac{2^3-1}{2^3+1}$$

✓ Trouver une expression plus simple de $A(n)$ en fonction de n.

Exercice n° 06 :

1)- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E): 1+3\sin x<\sqrt{3-4\cos^2 x}$

2)- calculer la valeur du nombre réel :

$$A=\tan(1^\circ)\times\tan(2^\circ)\times\tan(3^\circ)\times\ldots\times\tan(89^\circ) \ .$$

Exercice n° 07 :

✓ Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m L'ensemble des solutions de l'équation :

$$(E_m): \sqrt{x^2+2x-3}=mx+1 .$$

Exercice n° 08 :

1)- soient x , y et z trois nombres réels tel que : $x+y+z=0$

a)- montrer que : $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

b)- montrer que : $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}\times\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}=\dfrac{x^5+y^5+z^5}{5}$.

2)- la réciproque de 1)- a) est-elle vraie ? justifier votre réponse .

Exercice n° 09 :

1)- soient a , b , c et d quatre nombres réels strictement positifs .

✓ Montrer que : $ab\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ et $abcd\leq\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4$.

2)- pour tous réels x , y et z strictement positifs , montrer que :

$$(x+y+z)^3\geq 27xyz \ \text{ et } \ x^3+y^3+z^3\geq 3xyz \ .$$

Exercice n° 10 :

Soit x , y , z des réels strictement positifs tels que : $xyz=8$.

✓ Montrer que : $\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{y-2}{y+1}+\dfrac{z-2}{z+1}\leq 0$.

Exercice n° 11 :

1)- pour tous réels x et y , montrer que : $|x|+|y|\leq\dfrac{1}{2}+x^2+y^2$

Quand a-t-on l'égalité ?

2)- soient a , b et c trois nombres réels positifs tel que : $a\in[0,1]$

✓ Montrer que : $\sqrt{ab+(1-a)c}+\sqrt{(1-a)b+ac}\geq\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Quand a-t-on l'égalité ?

Exercice n° 12 :

x et y deux nombres réels strictement positifs tel que : $x^3y^2=1$.

✓ Montrer que : $(1+x)(2+y)\geq 6$.

- **Exercice n° 13 :**

Soient a , b et c trois nombres réels tel que : $a \geq b \geq c > 0$

✓ Montrer que : $a^2.\frac{b}{c}+b^2.\frac{c}{a}+c^2.\frac{a}{b} \geq a^2+b^2+c^2$.

- **Exercice n° 14 :**

1)- soit n un entier naturel non nul .

✓ Montrer que : $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2)- trouver un entier naturel non nul k tel que :

$$k < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right) < k+1 .$$

- **Exercice n° 15 :**

1)- x et y sont deux nombres réels strictement positifs.

✓ Montrer que : (i) : $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ et (ii) : $\frac{2}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

2)- soient a et b deux nombres réels strictement positifs tel que :

$a+b=1$ et n un entier naturel.

✓ Montrer que : (iii) : $\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\times\left(1+\frac{1}{b^n}\right) \geq \left(1+2^n\right)^2$.

- **Exercice n° 16 :**

Le plan $(\mathcal{P})$ étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

✓ Construire (Δ) l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que :

$$|x|+|y-1|=2 .$$

- **Exercice n° 17 :**

Soit M_1, M_2, . . . et M_{10} dix points du plan distincts deux à deux et situés à l'intérieur d'un carée de côté de longueur $a>0$.

✓ Démontrer qu'il existent i et j dans $\{1,2,\ldots,10\}$ tel que :

$$0 < M_iM_j < \frac{a\sqrt{2}}{3} .$$

- **Exercice n° 18 :**

On considère un repère orthonormé et cinq points A,B,C,D et E dont les cordonnées sont des nombres entiers , on trace ensuite tous les segments dont les extrémités sont choisis parmi ces points.

✓ Démontrer que le milieu d'un de ces segments est à cordonnées entières .

- **Exercice n° 19 :**

Soit ABC un triangle équilatéral, M un point intérieur au Triangle ABC et H , K , L les projetés orthogonaux respectifs de M Sur les trois côtés.

✓ Démontrer que la somme $MH+MK+ML$ est constante.

- **Exercice n° 20 :**

X et y deux nombres réels satisfaisant : $1 \leq x^2-xy+y^2 \leq 2$.

✓ montrer que : $\frac{2}{9} \leq x^4+y^4 \leq 8$.

- **Exercice n° 21 :**

Soient a , b et c trois nombres réels strictement positifs .

✓ montrer que : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

- **Exercice n° 22 :**

Soit n un entier naturel non nul .

✓ montrer que : $n < \sqrt{n^2+\sqrt{4n^2+\sqrt{16n^2+\sqrt{64n^2+1}}}} < n+1$.

- **Exercice n° 23 :**

1)- montrer que , pour tous x réel positif : $\left|\frac{2x+5}{x+2}-\sqrt{5}\right| \leq \left|x-\sqrt{5}\right|$

2)- soient a et b deux nombres réels tel que : $0 < a \leq b$.

✓ montrer que : $\frac{(b-a)^2}{8b} \leq \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \leq \frac{(b-a)^2}{8a}$.

- **Exercice n° 24 :**

Soient x et y deux nombres réels, montrer que :

$$(i) : |x|+|y| \leq |x+y|+|x-y| \text{ et } (ii) : \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$$

- **Exercice n° 25 :**

✓ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$(E_1) : 3x^2-3x-4\sqrt{x^2-x+3}=6 \ , \ (E_2) : \sqrt{x+7}+\sqrt{2x+3}=4$$

$$(I_1) : \sqrt{x^2+2x} \geq 1-x \text{ et } (I_2) : \sqrt{3-x} > \frac{1}{2}+\sqrt{x+1} .$$

- **Exercice n° 26 :**

soient x_1, x_2, x_3, x_4, et x_5 des réels tels que :

$$|x_2-x_1|=2|x_3-x_2|=3|x_4-x_3|=4|x_5-x_4|$$

✓ Montrer qu'ils sont tous égaux.

- **Exercice n° 27 :**

Soient x , y et z trois réels strictement positifs tel que : $x+y+z=1$.

✓ Montrer que : $x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.