



أكاديمية الحسن الثاني للعلوم والتقنيات

# المباراة العامة الأولى للعلوم والتقنيات

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية  
والتعليم العالي  
وتكوين الأطر  
والبحث العلمي

مدة الإنجاز: 4 ساعات

التخصص: رياضيات

الجمعة 16 يوليوز 2010

## التمرين الأول

نرمز ب  $I$  إلى أحد المجالات الأربعة  $[a, b]$  أو  $[a, +\infty[$  أو  $]-\infty, a]$  أو  $IR$  بحيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان يحققان  $a < b$ .

ليكن  $f$  تطبيقا معرفا من  $I$  إلى  $I$  بحيث يوجد عدد حقيقي  $k$ ، ينتمي إلى المجال المفتوح  $]0, 1[$ ، يحقق ما يلي :

$$\forall x \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

**تعريف:** كل عنصر  $x$  من  $I$  حيث  $f(x) = x$  يسمى نقطة ثابتة للدالة  $f$  في المجال  $I$ .

نهدف من هذا التمرين البرهنة على أن الدالة  $f$  تقبل نقطة ثابتة وحيدة في المجال  $I$  و نطوي طريقة لحساب قيمة مقربة لهذه النقطة بدقة معلومة.

### A. وحدانية النقطة الثابتة

1. نفترض أن  $f$  تقبل نقطتين ثابتتين مختلفتين  $x$  و  $y$  في المجال  $I$ ، بين أن  $|x - y| \leq k|x - y|$ .

2. استنتج!

### B. وجود النقطة الثابتة

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in IN}$  المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in IN. \end{cases}$$

I. نفترض في هذه الفقرة أن  $I = [a, b]$

1. بين أن لكل  $n$  لدينا  $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ ، ثم استنتج أن  $u_n - k^n(b - a) \leq u_{n+1} \leq u_n + k^n(b - a)$ .

نعتبر فيما يلي المتتاليتين العدديتين  $(v_n)_{n \in IN}$  و  $(w_n)_{n \in IN}$  المعرفتين، بدلالة البارامتر الحقيقي  $\alpha$ ، كما يلي :

$$v_n = u_n + \alpha k^n(b - a), w_n = u_n - \alpha k^n(b - a), n \in IN.$$

2. ما هو الشرط الذي يجب أن يحققه العدد  $\alpha$  كي تكون المتتاليتان  $(v_n)_{n \in IN}$  و  $(w_n)_{n \in IN}$  متحاديتان.

3. ليكن  $\alpha$  عددا يحقق الشرط أعلاه.

أ - بين أن  $(u_n)_{n \in IN}$  متتالية متقاربة وأن نهايتها  $\ell$  تنتمي إلى المجال  $[a, b]$ .

ب - بين أن لكل عدد صحيح طبيعي  $n$  لدينا  $|u_n - f(\ell)| \leq k^n |u_0 - \ell|$ .

ت - استنتج أن  $\ell$  نقطة ثابتة للدالة  $f$  في المجال  $[a, b]$ .

II. نفترض في هذه الفقرة أن  $I = [a, +\infty[$  و أن  $f(a)$  يخالف  $a$ .

نعتبر المستقيمين (D) و (Δ) الذين معادلتاهما، على التوالي، هما  $y = f(a) + k(x - a)$  و  $y = x$ .

1. ارسم المستقيمين (D) و (Δ) ثم بين أنه يوجد عدد حقيقي  $b$ ، ينتمي إلى المجال  $I$ ، بحيث  $a < b$  و

$$b = f(a) + k(b - a)$$



أكاديمية الحسن الثاني للعلوم والتقنيات

# المباراة العامة الأولى للعلوم والتقنيات

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية  
والتعليم العالي  
وتكوين الأطر  
والبحث العلمي

مدة الإنجاز: 4 ساعات

التخصص: رياضيات

الجمعة 16 يوليوز 2010

2. بين أن لكل عنصر  $x$  من المجال  $[a, b]$  لدينا  $a \leq f(x) \leq b$ .

3. استنتج أن الدالة  $f$  تقبل نقطة ثابتة في المجال  $I$ .

III. نفترض في هذه الفقرة أن  $I = ]-\infty, b]$

نضع  $J = \{-x/x \in I\}$  ونعتبر التطبيق  $g$  المعرف على المجال  $J$  كما يلي:

$$g(x) = -f(-x)$$

بين أن التطبيق  $g$  يحقق

$$\forall x \in J, |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$$

ثم بين أن  $f$  تقبل نقطة ثابتة في  $I$ .

IV. نفترض أخيرا أن  $I = \mathbb{R}$

1. تحقق أنه إذا كان  $f(0) = 0$  فإن  $0$  هو النقطة الثابتة الوحيدة للدالة  $f$ .

2. نفترض فيما يلي أن  $f(0) > 0$ .

أ - بين أنه يوجد عدنان  $a$  و  $b$ ، ينتميان إلى المجال  $I$ ، بحيث

$$a = f(0) - ka \quad \text{و} \quad b = f(0) + kb \quad \text{و} \quad a < b$$

ب - بين أن القطعة  $[a, b]$  مستقرة بالدالة  $f$  ثم استنتج أن لها نقطة ثابتة في  $\mathbb{R}$ .

3. ادرس الحالة المتبقية

C. طريقة لحساب قيمة مقربة لنقطة ثابتة

I. نحتفظ بنفس المعطيات الواردة في بداية هذا التمرين ونرمز ب  $\ell$  إلى النقطة الثابتة للدالة  $f$  في المجال  $I$ ،

و نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. بين أن لكل  $n$  و  $p$  لدينا  $|u_{n+p} - u_n| \leq |u_1 - u_0| k^n \frac{1 - k^p}{1 - k}$ .

2. استنتج أن لكل  $n$  لدينا  $|u_n - \ell| \leq |u_1 - u_0| \frac{k^n}{1 - k}$ .

II. دراسة مثال

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + 1$ .

1. بين أن  $f$  تحقق على المجال  $\mathbb{R}$  الشروط الواردة في التمرين.

2. استنتج أن  $f$  تقبل نقطة ثابتة وحيدة  $\ell$  في  $\mathbb{R}$ .

3. حدد أصغر عدد صحيح طبيعي  $n$  بحيث  $u_n$  قيمة مقربة ل  $\ell$  بدقة أقل من  $10^{-2}$ .



أكاديمية الحسن الثاني للعلوم والتقنيات

# المباراة العامة الأولى للعلوم والتقنيات

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية  
والتعليم العالي  
وتكوين الأطر  
والبحث العلمي

مدة الإنجاز: 4 ساعات

التخصص: رياضيات

الجمعة 16 يوليوز 2010

## التمرين الثاني

لتكن  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

تسمى المتتالية  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية فيبوناتشي Fibonacci.

### I. خصائص حسابياتية لحدود متتالية فيبوناتشي Fibonacci

1. تحقق أن جميع حدود هذه المتتالية هي أعداد صحيحة طبيعية.
2. ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا  $n \geq 1$ .

$$F_n F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

ب - استنتج أن العددين  $F_n$  و  $F_{n+1}$  أوليان فيما بينهما.

3. ليكن  $n$  و  $p$  من  $\mathbb{N}^*$ .

أ - بين المتساوية  $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1} F_p$ . (يمكن استعمال برهان بالترجع على  $p$ ).

ب - استنتج أن للعددين  $F_n$  و  $F_{n+p}$  و  $F_p$  و العددين  $F_n$  و  $F_p$  نفس القاسم المشترك الأكبر.

$$(F_{n+p} \wedge F_p = F_n \wedge F_p)$$

4. ليكن  $m$  و  $n$  عددين من  $\mathbb{N}^*$ . نرمز ب  $r$  لباقي القسمة الإقليدية للعدد  $m$  على  $n$ .

بين أن العددين  $F_m$  و  $F_n$  و العددين  $F_r$  و  $F_n$  لهما نفس القاسم المشترك الأكبر.

5. ليكن  $m$  و  $n$  عددين من  $\mathbb{N}^*$ . بين أن القاسم المشترك الأكبر للعددين  $F_m$  و  $F_n$  يساوي  $F_d$  حيث  $d$

هو القاسم المشترك الأكبر للعددين  $m$  و  $n$ . (يمكن استعمال خوارزمية إقليدس).

### II. تفكيك فيبوناتشي لعدد صحيح طبيعي : مبرهنة زيكيندورف Zeckendorf

سنبرهن فيما يلي على أن كل عدد صحيح طبيعي  $N$ ، مخالف لصفر، يكتب بطريقة وحيدة على الشكل :

$$N = \sum_{k=2}^n a_k F_k$$

حيث أن :

- $n$  عدد من  $\mathbb{N}$  أكبر أو يساوي 2 ،
- $a_2, \dots, a_n$  أعداد من المجموعة  $\{0,1\}$
- $a_k a_{k+1} = 0$  لكل عدد صحيح طبيعي  $k$  ينتمي إلى المجموعة  $\{2, \dots, n-1\}$  عندما يكون  $n \geq 3$ .



أكاديمية الحسن الثاني للعلوم والتقنيات

# المباراة العامة الأولى للعلوم والتقنيات

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية  
والعالمية العالي  
وتكنولوجيا الأطر  
والبحرر العلمرر

مدة الإنجاز: 4 ساعات

التخصص: رياضيات

الجمعة 16 يوليوز 2010

**تعريف:** نسمي هذا التفكير "تفكير فيبوناتشي".

1. نهاية المتتالية  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$

أ - بين أن المتتالية  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تزايدية.

ب - نفترض أن المتتالية  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تؤول إلى عدد حقيقي  $l$ . بين أن  $l = 0$  ثم استنتج أن المتتالية

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متباعدة و نهايتها  $+\infty$ .

2. قابلية تفكير عدد صحيح طبيعي إلى تفكير فيبوناتشي

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 و نعتبر العبارة  $P_n$  التالية :

$P_n$  : "كل عدد صحيح طبيعي  $N$  يحقق  $1 \leq N < F_n$  فهو قابل لتفكير فيبوناتشي".

لنبرهن بالترجع أن العبارة  $P_n$  صحيحة مهما كان  $n$  عدد صحيح طبيعي و  $n \geq 2$ .

أ - تحقق أن العبارتين  $P_2$  و  $P_3$  صحيحتان.

ب - نفترض أن العبارة  $P_k$  صحيحة لكل  $k$  حيث  $2 \leq k \leq n$  و نرمز ب  $N$  لعدد صحيح طبيعي يحقق

$1 \leq N < F_{n+1}$ . ادرس قابلية  $N$  لتفكير فيبوناتشي في الحالتن التاليتين :

•  $1 \leq N \leq F_n$  ؛

•  $F_n < N < F_{n+1}$  (لاحظ أن  $1 \leq N - F_n < F_{n-1}$ ).

ت - باستعمال ما سبق بين أن كل عدد طبيعي  $N \geq 1$  قابل لتفكير فيبوناتشي.

3. وحدانية التفكير

ليكن  $N$  عددا صحيحا طبيعيا مخالفا لصفرو و نعتبر أن  $N = \sum_{k=2}^n a_k F_k$  تفكير فيبوناتشي للعدد  $N$ .

أ - بين بالترجع أن  $\sum_{k=2}^{n-1} a_k F_k < F_n$ .

ب - ماذا يمثل العدد  $a_n$  بالنسبة للعدد  $N$  ؟

ت - بين وحدانية تفكير فيبوناتشي.

4. أعط حدود متتالية فيبوناتشي الأصغر من العدد 2010 ثم استنتج تفكير فيبوناتشي للعدد 2010.