ثانـــويـة وادي الــــذهــب	فرض محروس رقم 6	الموسم الدراســي	2011/2012
ثا.محمد بن الحسن الوزاني	في مادة الرياضـــيات	مدة الإنجــــــــاز	أربع ساعات
تيـــــفلت – الخـميســـات	www.riyadiyat.net	المستوى الدراسي	$2BSM$

❖ **التمرين الأول:** (3ن)

I)- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 21u-52v=1$

(0.5ن) 1)- باستعمال خوارزمية إقليدس،حدد حل خاص للمعادلة (E) .

(0.5ن) 2)- استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

II)- نعتبر في $\mathbb{N}$ المعادلة: $(F): x^{21}\equiv 2\,[53]$.

1)- ليكن x حلا للمعادلة (F).

(0.5ن) أ- بين أن 53 أولي و أن x و 53 أوليان فيما بينهما .

(0.5ن) ب- بين أن $x^{52}\equiv 1\,[53]$ و أن $x\equiv 2^5\,[53]$

(0.5ن) 2)- بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق $x\equiv 2^5\,[53]$ فإن x حل للمعادلة (F).

(0.5ن) 3)- بين أن حلول المعادلة (F) هي الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تكتب على الشكل $-21+53k$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

❖ **التمرين الثاني:** (3ن)

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي:

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x*y=x+y-mxy$ حيث $m\in\mathbb{R}^*$. نضع: $E=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{m}\right\}$.

ليكن φ التطبيق الذي يربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $\varphi(x)=1-mx$.

(0.25ن) 1)-أ- تحقق أن $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,(1-mx)(1-my)=1-m(x*y)$.

(0.25ن) ب- استنتج أن $(E,*)$ جزء مستقر من $(\mathbb{R},*)$.

(0.5ن) 2)-أ- بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(E,*)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$.

(0.75ن) ب- استنتج أن $(E,*)$ زمرة تبادلية محددا عنصرها المحايد و مماثل كل عنصر من E .

3)- لكل x من E ، نضع : $x^{(0)}=0$ و $x^{(n+1)}=x^{(n)}*x$,$\forall n\in\mathbb{N}$.

(0.5ن) أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N},\varphi\left(x^{(n)}\right)=\left(\varphi(x)\right)^n$.

(0.75ن) ب- استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n ، لكل x من E.

❖ **التمرين الثالث:** (4ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التطبيق r الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_1(z_1)$ بحيث: $z_1=iz_1+1+i$، و التطبيق h الذي يربط النقطة $M_1(z_1)$ بالنقطة $M_2(z_2)$ بحيث: $z_2=-2z_1+3i$. نضع: $F=h\circ r$.

نعتبر النقطتين $\Omega(i)$ و $A_0(a_0)$، حيث a_0 عقدي يخالف i، و نضع $\forall n\in\mathbb{N}, A_{n+1}=F(A_n)$.

(1ن) 1)- حدد طبيعة كل من التطبيقين r و h و عناصرهما المميزة.

(0.5ن) 2)-أ- بين أنه إذا كانت $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ بالتطبيق F فإن: $z'-i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-i)$

(0.25ن) ب- تحقق أن Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق $F(\Omega)=\Omega$.

(0.75ن) 3)-أ- حدد a_n لحق النقطة A_n بدلالة a_0 و n.

(0.75ن) ب- بين أن النقط Ω و A_0 و A_{2n} مستقيمية و أن النقط Ω و A_1 و A_{2n+1} مستقيمية.

(0.75ن) ج- بين أن $(A_0A_{2n})\perp(A_1A_{2n+1})$ و أن $\overrightarrow{A_{2n}A_{2n+1}}=(-4)^n\overrightarrow{A_0A_1}$.

❖ مســـــــــــألة:(10ن)

I)- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^{x}}$، وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)-أ- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) بجوار كل من $+\infty$ و $-\infty$. (0.75ن)

ب-ضع جدول تغيرات الدالة f، ثم أرسم المنحنى (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (0.75ن)

2)-أ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يجب تحديده. (0.25ن)

ب- أنشئ $(C_{f^{-1}})$، منحنى الدالة العكسية f^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (0.25ن)

ج- حدد $f^{-1}(x)$، لكل x من المجال J. (0.5ن)

3)-أ- تحقق أن $f(x)=e^{x}-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$، لكل x من $\mathbb{R}$. (0.25ن)

ب- ليكن $\lambda\in]-\infty,0]$. أحسب $A(\lambda)$، المساحة الهندسية لحيز المستوى المحصور بين المنحنى $(C_{f^{-1}})$ و محوري المعلم و المستقيم الذي معادلته $y=\lambda$. (0.75ن)

II)- نضع: $F_n(x)=\int_x^0\frac{e^{nt}}{1+e^{t}}dt$، لكل $n\in\mathbb{N}^*$ و لكل $x\in]-\infty,0]$.

1)- أحسب $F_1(x)$ لكل $x\in]-\infty,0]$، ثم استنتج أن $\lim_{x\to-\infty}F_1(x)=\ln 2$. (0.5ن)

2)- أحسب $\lim_{x\to-\infty}F_2(x)$. (0.25ن)

3)- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*, F_{n+1}(x)+F_n(x)=\frac{1}{n}(1-e^{nx})$. (0.75ن)

4)- بين بالترجع أن الدالة F_n تقبل نهاية منتهية عندما يؤول x إلى $-\infty$. (0.5ن)

❖ نضع في كل ما يلي من التمرين: $R_n=\lim_{x\to-\infty}F_n(x)$، لكل n من $\mathbb{N}^*$.

5)-أ- تحقق أن $\forall t\in]-\infty,0], 2e^{t}\le 1+e^{t}\le 2$. (0.5ن)

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}),(\forall x\in]-\infty,0]),\frac{1}{2n}(1-e^{nx})\le F_n(x)\le\frac{1}{2(n-1)}\left(1-e^{(n-1)x}\right)$. (0.75ن)

ج- استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}),\frac{1}{2n}\le R_n\le\frac{1}{2(n-1)}$، ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}R_n$. (0.75ن)

III)- نضع: $G_n(x)=(-1)^n\int_x^0 e^{nt}dt$، لكل $n\in\mathbb{N}^*$ و لكل $x\in]-\infty,0]$.

1)-أ- أحسب $G_n(x)$، ثم استنتج أن $\lim_{x\to-\infty}G_n(x)=\frac{(-1)^n}{n}$. (0.5ن)

ب- بين أن: $\sum_{k=1}^{n}G_k(x)=-F_1(x)+(-1)^nF_{n+1}(x)$. (0.75ن)

2)- لكل $n\in\mathbb{N}^*$، نضع: $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

أ- بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*), u_n=\ln 2+(-1)^{n+1}R_{n+1}$. (0.75ن)

ب- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة، ثم حدد نهايتها. (0.5ن)