

Durée : 02 heuresNote :

- ✓ *Aucun document ni calculette n'est autorisé .*
- ✓ *La qualité de la rédaction , la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies .*
- ✓ *Le sujet comporte deux pages et tous les exercices sont indépendants .*

○ Exercice 01: (02 points)

- 1) - Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation : (E) : $2x^2 + 3x - 2 = 0$.
- 1) - Dédire la valeur de vérité de la proposition : $p : (\exists n \in \mathbb{N}); 2n^2 + 3n - 2 = 0$.

○ Exercice 02: (03 points)

- ⇒ On considère la proposition : $q : \forall x \in \mathbb{R}; (x < 2 \Rightarrow x^2 < 4)$.
- 1,5) 1) - Ecrire la négation de q .
- 1,5) 2) - En utilisant un raisonnement par contre exemple , montrer que q est fausse .

○ Exercice 03: (03 points)

- 1,5) 1) - Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{**}), x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- 1,5) 2) - En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{**}), x^5 - x^3 + x \geq 3 \Rightarrow x^6 \geq 5$.

○ Exercice 04: (02 points)

- ✓ En utilisant un raisonnement par disjonction des cas (ou une récurrence)
Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 5n^3 + 11n^2 + 3$ est entier impair .

○ Exercice 05: (02 points)

- ⇒ Soient x et y deux nombres réels strictement positifs .
- ✓ Montrer par l'absurde que : $(x \leq \sqrt{2})$ ou $(\frac{1}{y} \leq \sqrt{2})$ ou $(y + \frac{1}{x} \leq \sqrt{2})$.

Durée : 02 heures**○ Exercice 06: (03 points)**

⇒ On pose : $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n-1)^2$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1,5 1)- Calculer S_1 , S_2 et S_3 .

1,5 2)- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$.

○ Exercice 07: (05 points)

1,5 1)- Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^{**}), \sqrt{2a+1} \leq a+1$.

1,5 2)- Montrer que : $(\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{**})^2), \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

3)- Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

2 ✓ Montrer que : $\frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1}}{2} \leq x+y+1$. (appliquer 2) puis 1)

○ Exercices bonus:**○ Exercice 01:**

⇒ Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

2 ✓ Prouver par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), xy \leq \frac{x^{n+2} + y^{n+2}}{x^n + y^n}$.

○ Exercice 02:

⇒ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$(n+1 \text{ est un carré parfait}) \Rightarrow (14n+14 \text{ est somme de 3 carrés parfait})$

(Indication : écrire en premier 14 comme somme de 3 carrés parfait).

○ Exercice 03:

⇒ Soient x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 cinq nombres réels tels que :

$$|x_2 - x_1| = 2|x_3 - x_2| = 3|x_4 - x_3| = 4|x_5 - x_4| = 5|x_1 - x_5|.$$

3 ✓ Prouver que ces nombres réels sont tous égaux (raisonner par l'absurde).

Fin Du Sujet .