ثانوية موسى بن نصير	تجريبي رقم 03	2 بكالوريا علوم رياضية
مديرية الخميسات	دورة ماي 2017/2016	ذ : عبدالله بن الختير

مدة الإنجاز : أربع ساعات

التمرين الأول: (03 ن)

I- نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E): 2x^4+x-1\equiv 0[10]$.

1)- ليكن x حلا للمعادلة (E) .

أ- بين أن : $x\wedge 10=1$ (يمكنك استعمال مبرهنة بوزو) . — 0,5

ب- استنتج أن : $x\equiv -1[10]$ (يمكنك استعمال مبرهنة فيرما) . — 0,75

2)- حدد مجموعة حلول المعادلة (E) معللا جوابك . — 0,5

II- نعتبر في $\mathbb{R}^+$ المعادلة : $(F): 2x^4+x-1=0$.

أ- بين أن المعادلة (F) تقبل حلا وحيدا λ في $\mathbb{R}^+$ و أن : $\lambda\in]0,1[$. — 0,5

ب- بين أن λ عدد لاجذري (يمكنك الاستدلال بالخلف و تطبيق مبرهنة كوص) . — 0,75

التمرين الثاني: (3,5 ن)

⇦ في $\mathrm{IM}_2(\mathbb{R})$ نعتبر المجموعة : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

و نضع : $I=M(1,0)$ و $J=M(0,1)$.

1)- أ- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$. — 0,25

ب- بين أن الأسرة $\mathrm{B}(I,J)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$. — 0,5

ج- بين أن : $J^2=-3.I$ ، ثم استنتج أن E جزء مستقر من $(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}),\times)$. — 0,5

د- حدد إحداثيتي المصفوفة : $S_n=I+J+J^2+\ldots+J^n$ في الأساس $\mathrm{B}(I,J)$ ، حيث $n\in\mathbb{N}$. — 0,5

2)- نعتبر التطبيق : $\begin{array}{rl} f: & \mathbb{C}\to E \\ & a+ib\sqrt{3}\mapsto M(a,b)\end{array}$.

أ- بين أن الأسرة $\mathrm{B}'(1,i\sqrt{3})$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$. — 0,25

ب- بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(E,\times)$ ، ثم استنتج بنية $(E^*,\times)$. — 0,5

3)- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي (ينبغي تحديد مقلوب كل مصفوفة $M(a,b)$ من E^*) . — 0,25

4)- نضع : $A=\frac{1}{2}.(I+J)$. حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}$ التي من أجلها يكون : $A^n=I$. — 0,75

التمرين الثالث: (3,5 ن)

⇦ ليكن $a \in]0,+\infty[$ ، ونعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E):(a+i)z^2-(1+i)\big((a-1)+(a+1)i\big)z-(a-i)(a+i)^2=0 .$$

1)- تحقق أن $z_1=a+i$ حل للمعادلة (E) ، ثم استنتج الحل الثاني z_2 .	0,75
2)- المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.	
نعتبر النقطتين $A(z_1)$ و $B(z_2)$ و ليكن r الدوران الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B	
و ليكن h التحاكي الذي يحول النقطة A إلى النقطة C ذات اللحق : $z_C=-a-i$ و مركزه هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .	
أ- بين أن قياس زاوية الدوران r هو : $\theta=2\arctan(a)$.	0,75
ب- أعط الصيغة العقدية للتحاكي h ، ثم أحسب لحق النقطة D بحيث : $D=h(B)$.	0,75
ج- أوجد الصيغة العقدية للتحويل $F=h\circ r$ و استنتج طبيعته .	0,75
د- بين أن النقط A و B و C و D متداورة .	0,5

التمرين الرابع: (07 ن)

الجزء الأول:

⇦ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=\int_0^x \frac{t}{e^t+e^{-t}}\,dt .$$

و نقبل أن للدالة f نهاية منتهية عندما تؤول x إلى $+\infty$ و نضع : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

1)- بين أن الدالة f زوجية .	0,25
2)- بين أن : $(\forall t\in[0,+\infty[);\ \frac{1}{2}e^{-t}\le\frac{1}{e^t+e^{-t}}\le e^{-t}$. ثم استنتج أن $\frac{1}{2}\le L\le 1$.	0,5
3)- أ- بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=\frac{x}{e^x+e^{-x}}$.	0,5
ب- ضع جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.	0,25
ج- بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[);\ xe^{-x}\le\frac{1}{e}$ ، ثم استنتج أن : $(\forall x\in]0,+\infty[);\ \lvert f'(x)\rvert\le\frac{1}{e}$.	0,5
د- بين أن المعادلة : $(E):\ f(x)=1-x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0,+\infty[$.	0,5
3)- لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0\in]0,+\infty[\\ (\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=1-f(u_n)\end{cases}$.	
أ- تحقق أن : $(\forall n\in\mathbb{N});u_n>0$.	0,25
ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\lvert u_{n+1}-\alpha\rvert\le\frac{1}{e}\lvert u_n-\alpha\rvert$ ، ثم استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .	0,75

الجزء الثاني:

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$F(0)=L$ و $(\forall x\in]0,+\infty[);F(x)=f(\ln x)$.

1)- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.	0,5
2)- بين أن F متصلة على $[0,+\infty[$.	0,75
3)- بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن : $(\forall x\in]0,+\infty[);F'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$.	0,75
4)- أ- بين أن : $(\forall x\in]0,1[);\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\leq\dfrac{1}{2}\ln x$ (يمكنك تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية) .	0,5
ب- هل الدالة F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر ؟ أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .	0,5
5)- بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[);F(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t)}{t^2+1}dt$.	0,5

○ Exercice n°05 :(03 pts)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient **3** boules blanches et **2** boules Noires , l'urne U_2 contient **1** boule blanche et **4** boules noires .

Soit l'épreuve qui consiste à tirer au hasard de U_1 **2** boules simultanément et de U_2 **3** boules successivement et sans remise .

1)- Soit l'événement A:<< obtenir cinq boules noires>> .

0,5 ✓ Montrer que : $p(A)=\dfrac{1}{25}$.

2)- Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombres de boules blanches Obtenues .

0,75 **a)-** Déterminer la loi de probabilité de X .

0,5 **b)-** Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

3)- On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les Boules dans leurs urnes d'origines .

0,5 **a)-** Calculer la probabilité de l'événement suivant :

B: << A est réalisé exactement trois fois>>.

b)- Après les cinq répétions on réalise l'épreuve suivante :

- Si B est réalisé , on mélange les deux urnes et on tire simultanément deux boules du mélange .
- Sinon on tire une boule de chaque urne .

On note C l'événement << Obtenir deux boules blanches>>

0,75 ✓ Calculer $p(C/B)$ et $p(C/\overline{B})$, puis en déduire $p(C)$.