الأستاذ: م. ادير

فرض محروس رقم 4

المجمع التربوي علال عواد

9	المعامل:		الرياضيات	المــــــادة:
4س	مدة الإنجاز:	$\frac{1}{3}$	شعبة العلوم الرياضية ا و ب	الشعــــبة.

	س-ت
التمرين الأول : (6,5 ن)	
I المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم و مباشر . وليكن $m \in \mathbb{C}^*$.	
1- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E): z^2-(2-\sqrt{3}+i)mz+2(i-\sqrt{3})m^2=0$	
أ – بين أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta=(2+\sqrt{3}-i)^2m^2$	0,25
ب - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .	0, 5
ج – ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث $\arg(z_1)\equiv\arg(m)[2\pi]$ ، اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على شكله الآسي.	0, 5
2- نعتبر التطبيق F المعرف من المستوى (P) نحو المستوى (P) و الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث: $z'=ze^{i\frac{5\pi}{6}}$.	
أ – حدد طبيعة التطبيق F و عناصره المميزة .	0,25
ب – حدد صورة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1+i)$ و شعاعها $R=2$ بالتطبيق F.	0, 5
3- لتكن M_0 النقطة التي لحقها i و لكل n من $\mathbb{N}$ نعتبر النقطة M_n التي لحقها z_n و M_{n+1} صورة M_n بالتطبيق F	
أ – بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}): z_n=e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}n)}$	0,5
ب – بين أن : $(\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2): M_n=M_p \Leftrightarrow n\equiv p[12]$.	0, 5
ج – حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E'): 12x-5y=3$.	0,5
د – استنتج مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث M_n تنتمي إلى نصف المحور الحقيقي الموجب.	0,5
4- نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S): \begin{cases} x\equiv 0[12] \\ x\equiv 3[5] \end{cases}$.	
أ – ليكن الزوج $(u_0;v_0)$ حلا للمعادلة (E'). بين أن $x_0=12u_0=5v_0+3$ حل خاص للنظمة (S)	0,5
ب – بين أن x حلا للنظمة (S) اذا وفقط اذا كان $\begin{cases} x\equiv x_0[12] \\ x\equiv x_0[5] \end{cases}$.	0, 5
ج – استنتج أن x حلا للنظمة (S) اذا وفقط اذا كان $x\equiv x_0[60]$.	0, 5
د – حل في $\mathbb{Z}$ النظمة (S).	0, 5
ه – حدد المجموعة $R_n=\{n\in\mathbb{N} / M_n=M_0 \;\; et \;\; n\equiv 3[5]\}$.	0, 5

التمرين الثاني: (4,5 ن)

نذكر أن $\left(M_2\left(IR\right),+\,,\,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$.

1- نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي بما يلي :

$$\forall(x,y)\in E;\forall(a,b)\in E:(x,y)\mathrm{T}(a,b)=(xa,xb+\frac{y}{a})$$

أ – احسب $(1,2)\mathrm{T}(2,1)$ و $(2,1)\mathrm{T}(1,2)$. 0,5

ب – بين أن : T تجميعي و يقبل عنصرا محايدا. 0,5

ج – بين أن كل عنصر (x,y) من E يقبل مماثلا في (E,T) و أن : $(x,y)'=(\frac{1}{x},-y)$ 0,5

د – استنتج بنية (E,T). 0, 5

2- نعتبر المجموعة : $\mathrm{F}=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{1}{x}&0\\-y&x\end{pmatrix};(x,y)\in E\right\}$

بين أن : $(F,\times)$ جزء مستقر من $\left(M_2\left(IR\right),\,\times\right)$. 0,5

3- نعتبر التطبيق : $\varphi:\begin{array}{l}(E,\mathrm{T})\to(\mathrm{F},\times)\\(x,y)\mapsto M(x,y)\end{array}$

أ – بين أن: φ تشاكل تقابلي . 0,5

ب – بين أن : $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية . 0,5

4- نعتبر المجموعة : $H=\left\{M(x,y)\in\mathrm{F}\ \ /\ \mathrm{y}=0\right\}$

أ – بين أن $(\mathrm{H},\times)$ زمرة تبادلية . 0, 5

ب – حل في H المعادلة : $X^2=I$ 0, 5

التمرين الثالث:(6 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases}F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{Arc\tan t}\ \ ;\ \ x\neq 0\\ F(0)=\ln 2\end{cases}$

1- بين أن الدالة F زوجية . 0,5

2- لكل x من $]0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{dt}{Arc\tan t}$

أ – تحقق من أن : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$ 0, 5

ب – بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و احسب $F'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$. 0, 5

ج – بين أن : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);\ \ 2Arc\tan x\geq Arc\tan 2x$. 0,5

د – استنتج منحى تغيرات الدالة F 0, 5

3- بين أن : $F(x)=\dfrac{x}{Arc\tan c};\ \left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\left(\exists c\in\left[x,2x\right]\right)$. 0,5

4- استنتج أن : $\dfrac{x}{Arc\tan 2x} \le F(x) \le \dfrac{x}{Arc\tan x}$; $\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right)$.	0, 5
5- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.	1
6- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية اثبت أن : $\dfrac{x}{1+x^2} < Arc\tan x < x$; $\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right)$	0, 5
7- استنتج أن الدالة F متصلة و قابلة للاشتقاق على يمين 0 .	1
<u>التمرين الرابع:(3 ن)</u>	
يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و كرتين بيضاوين ، لا يمكن التمييز بينها باللمس .	
1- نسحب عشوائيا 3 كرات بالتتابع و بدون احلال . احسب احتمال الحدثين التاليين :	
أ- A : " الكرتين الأولى و الثانية حمراوين و الثالثة بيضاء ".	0,2 5
ب- B : " كرة واحدة من بين الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء "	0, 25
2- نسحب عشوائيا 3 كرات بالتتابع و باحلال . احسب احتمال الحدثين A و B .	1
3- ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نسحب عشوائيا n كرات بالتتابع و باحلال . ليكن p_n احتمال الحدث : " سحب الكرة الأخيرة فقط بيضاء "	
أ- احسب p_1 و p_2 و p_3 .	0, 75
ب- بين أن : $p_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$	0, 5
ت- حدد أدنى n عدد السحبات لكي تكون $p_n \le 10^{-2}$.	0, 25