ثانوية موسى بن نصير نيابة الخميسات	فرض محروس رقم 08 الدورة الثانية: 2009/2008	الثانية بكالوريا علوم رياضية ذ : عبدالله بن لحتير

Durée : 04h

- **التمرين الأول:** (04 نقط) abouzakariya@yahoo.fr

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$ لمجموعة الدوال العددية المعرفة من $\mathbb{R}^{*+}$ نحو $\mathbb{R}$

نعتبر المجموعة F للدوال القابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}^{*+}$ و التي تحقق :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+});\ x^2f''(x) - 3xf'(x) + 4f(x) = 0 .$$

1)- بين أن F فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$.

2)- لتكن φ_1 و φ_2 الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}^{*+}$ كما يلي : $\varphi_1(x) = x^2$ و $\varphi_2(x) = x^2 \ln x$.

أ- تحقق من أن φ_1 و φ_2 تنتميان إلى F .

ب- بين أن الأسرة (φ_1, φ_2) حرة في $(F,+,\cdot)$.

3)- لتكن f دالة من F ، و لكل t من $\mathbb{R}$ نضع : $g(t) = f(e^t)$.

أ- بين أن الدالة g حل للمعادلة التفاضلية : $(G): y'' - 4y' + 4y = 0$.

ب- حل المعادلة (G) ، ثم إستنتج أن الأسرة (φ_1, φ_2) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(F,+,\cdot)$.

- **التمرين الثاني:** (04 نقط) www.besmaths.un.ma

ليكن α عددا حقيقيا غير منعدم .

نعرف على المجموعة $G = \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي $*$ كما يلي :

$$(\forall (x,y) \in G \text{ و } \forall (x',y') \in G);\ (x,y) * (x',y') = (xx', x^{\alpha}y' + x'y) .$$

1)- بين أن $(G,*)$ زمرة ، و أن القانون $*$ تبادلي إذا و فقط إذا كان $\alpha = 1$.

2)- لتكن المجموعة : $ID = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x^{\alpha} & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / (x,y) \in G \right\}$.

أ- بين أن ID جزء مستقر من $(IM_2(\mathbb{R}), \times)$.

ب- نعتبر التطبيق ψ المعرف من G نحو ID كما يلي : $(\forall (x,y) \in G); \psi(x,y) = M(x,y)$.

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(ID,\times)$ ، ثم إستنتج بنية $(ID,\times)$ و حدد مقلوب كل عنصر $M(x,y)$ من ID .

3)- لتكن المصفوفة : $A = M(1,1)$.

و نعتبر المجموعة : $E = \{aI + bA \in IM_2(\mathbb{R}) / (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ حيث I هي المصفوفة الوحدة .

أ- تحقق من أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $(IM_2(\mathbb{R}),+)$.

ب- بين أن : $A^2 = -I + 2.A$ ، ثم إستنتج أن E جزء مستقر من $(IM_2(\mathbb{R}),\times)$.

ج- بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية ، و غير كاملة .

- **التمرين الثالث: (05 نقط)**

نعتبر نردا مكعبا و متوازنا و جوهه مرقمة كالتالي : -1 ، -1 ، -1 ، 0 ، 1 و 1 .

I- نرمي هذا النرد مرتين متتاليتين و نسجل بالتتابع العددين المحصل عليهما عند الإستقرار .

1)- أحسب إحتمال كل حدث من الحدثين :

A : ((الحصول على عددين مختلفين))

B : ((الحصول على عددين مجموعهما منعدم)) .

2)- أحسب إحتمال الحدث التالي :

C : ((الحصول على عددين مختلفين علما أن مجموعهما منعدم)) .

3)- ليكن X المتغير العشوائي المرتبط بمجموع العددين المحصل عليهما .

أ- حدد قانون إحتمال X .

ب- أحسب إحتمال الحدث : (($X > 0$)) .

II- نرمي النرد هذه المرة n مرة متتالية (حيث $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$) .

و نعتبر المتغير العشوائي Y المرتبط بعدد المرات (من بين n) التى نحصل فيها على الرقم ((1))

أ- أحسب بدلالة n العدد p_n إحتمال الحدث : (($Y = 2$)) .

ب- أحسب بدلالة n العدد q_n إحتمال الحدث : (($Y \geq 1$)) ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(q_n)_{n\geq 2}$.

ج- حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n ($n \geq 2$) بحيث $q_n \geq 0,99$.

• **التمرين الرابع**: (**07 نقط**)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(1-x)e^{2x}$.

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1)- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

2)- ضع جدول تغيرات f .

3)- أ- أدرس تقعر المنحنى (C_f) و بين أنه يقبل نقطة إنعطاف وحيدة Ω ينبغي تحديدها .

ب- أنشىء المنحنى (C_f) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (مبرزا المماس عند نقطة الإنعطاف Ω) .

4)- أحسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذان معادلتاهما على التوالي : $x=0$ و $x=1$.

5)- مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n=\int_0^1(1-x)^n e^{2x}dx$.

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ \frac{1}{n+1}\le u_n\le\frac{e^2}{n+1}$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ 2u_{n+1}=(n+1)u_n-1$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6)- لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $v_n=\frac{2^n}{n!}u_n$.

أ- بين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ \frac{2^{n-1}}{n!}\le 1$.

ب- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ v_n\le\frac{2e^2}{n+1}$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ v_{n+1}=-\frac{2^n}{(n+1)!}+v_n$.

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ v_n=\frac{1}{2}\left(e^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\right)$.

ج- إستنتج النهاية : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$.

abouzakariya@yahoo.fr