Exercice 1: (11 points)

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
On rappelle que :

— *$\mathcal{M}_3(\mathbb{Q}$ muni de l'addition et de la multiplication des matrices est un anneau unitaire.*

— *$\mathcal{M}_3(\mathbb{Q}$ muni de l'addition et de la multiplication par un rationnel est un $\mathbb{Q}$ espace vectoriel.*

I. *Soit* E *l'ensemble des matrices de la forme* $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix}$ *où a, b et c désignent trois rationnels quelconques.*

1. *Montrer que $M(a,b,c) = aI + bJ + cK$,*
où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
En déduire que E *est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q}$. Quelle est sa dimension ?*

2. *Calculer J^2, JK, KJ et K^2. Démontrer que ces matrices sont des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de I, J, K et que $J^3 = J + I$. En déduire que* E *est stable pour la multiplication des matrices.*

II. *Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x - 1$.*

1. *a. Étudier les variations de f.*
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule racine réelle ω. ($\omega^3 = \omega + 1$).

b. Montrer que ω n'est pas rationnel. (On pourra raisonner par l'absurde en supposant que $\omega = \frac{p}{q}$, avec p et q entiers relatifs premiers entre eux).

2. *a. α et β étant deux nombres rationnels quelconques.*
Montrer que si $\omega^2 = -\alpha\omega + \beta$ alors $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$.

b. En déduire que pour tout couple (α, β) d'éléments de $\mathbb{Q}$, on a : $\omega^2 \neq -\alpha\omega + \beta$.

3. *Soit* F *l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\omega + c\omega^2$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$.*

a. Démontrer que F *est un espace vectoriel $\mathbb{R}$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ et que $\mathbb{B} = (1, \omega, \omega^2)$ est une base de* F.

b. On considère l'application φ de F *dans* E *définie par $\varphi\left(a + b\omega + c\omega^2\right) = M(a,b,c)$.*
Montrer que φ est un isomorphisme de l'espace vectoriel F *sur l'espace vectoriel* E.

4. *a. Montrer que* F *est stable pour la multiplication.*

b. Montrer φ est un isomorphisme $(\mathrm{F}, \times)$ sur $(\mathrm{E}, \times)$.

c. Résoudre dans E *l'équation : $M^3 - M - I = O$.*
(O désigne la matrice nulle d'ordre trois)