الأعداد العقدية

أهداف الدرس

➢ التعرف على عدد عقدي و على المجموعة $\mathbb{C}$ ➢ التمكن من تمثيل عدد عقدي هندسيا ➢ تحديد لحق نقطة و لحق متجهة ➢ التعرف على الكتابة الجبرية لعدد عقدي ➢ التعرف على مرافق و معيار عدد عقدي	➢ التعرف على شكل مثلثي لعدد عقدي ➢ توظيف الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية ➢ التمكن من التأويل الهندسي للأعداد العقدية(العمليات) ➢ ترجمة مفاهيم هندسية إلى لغة الأعداد العقدية (منتصف قطعة – الاستقامية ....)

القدرات المنتظرة

- التمكن من الحساب على الأعداد العقدية
- الانتقال بين الكتابة الجبرية و المثلثية
- تطبيق الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية
- التعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي .

الامتدادات

❖ الحساب التكاملي ❖ الكهرباء و الميكانيكا	❖ الهندسة.

فقرات الدرس

- مجموعة الأعداد العقدية
  - ➢ الشكل الجبري لعدد عقدي
- العمليات في مجموعة الأعداد العقدية
  - ➢ المتطابقات الهامة
  - ➢ الشكل الجبري و العمليات
- التمثيل الهندسي لعدد عقدي
- مرافق عدد عقدي
- معيار عدد عقدي
- عمدة و شكل مثلثي لعقدي غير منعدم
- زاوية متجهتين و عمدة خارجيهما
- الكتابة العقدية لكل من الإزاحة و التحاكي

I)- مجموعة الأعداد العقدية L’ensemble des nombres complexes

1)- المجموعة $\mathbb{C}$

مبرهنة (مقبولة)

توجد مجموعة يرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$ عناصرها تسمى أعدادا عقدية و تحقق ما يلي:
- $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$ ضمن $\mathbb{C}$).
- يوجد عنصر غير حقيقي من $\mathbb{C}$، يرمز له بالرمز i و يحقق : $i^2=-1$.
- كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية وحيدة على الشكل $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان .
- المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ و لهما نفس الخاصيات.

2)- الشكل الجبري لعدد عقدي La forme algébrique d’un nombre complexe

تعريف

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا، حيث x و y عددان حقيقيان .
- الكتابة $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z.
- العدد x يسمى الجزء الحقيقي للعقدي z و نكتب $Re(z)=x$.
- العدد y يسمى الجزء التخيلي للعقدي z و نكتب $Im(z)=y$.
- إذا كان $Re(z)=0$ ، نقول إن z تخيلي صرف.
- مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة يرمز لها بالرمز $i\mathbb{R}$ و لدينا: $i\mathbb{R}=\{iy\ /\ y\in\mathbb{R}\}$

أمثلة

- $Re(1-i)=1$ و $Im(1-i)=-1$
- $Re(2i)=0$ و $Im(2i)=2$
- $Re(-2)=-2$ و $Im(-2)=0$
- $Re\left(1-i\sqrt{2}\right)=1$ و $Im\left(1-i\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}$

ملاحظة

- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow Im(z)=0$ و $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow Re(z)=0$ ، لكل z من $\mathbb{C}$.
- الكتابة $z=-2+i(1+i)$ ليست هي الشكل الجبري للعقدي z لأن $(1+i)\notin\mathbb{R}$.

3)- تساوي عددين عقديين Egalité de deux nombres complexes

خاصية

يكون عددان عقديان متساويان إذا و فقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء. التخيلي:
$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2, z=z'\Leftrightarrow Re(z)=Re(z')$ و $Im(z)=Im(z')$.

ملاحظات

- $\forall z\in\mathbb{C}, z=0\Leftrightarrow Re(z)=0$ و $Im(z')=0$.
- $\forall z\in\mathbb{C}, z\neq0\Leftrightarrow Re(z)\neq0$ أو $Im(z')\neq0$.
- إذا كانت a و b و x و y أعدادا حقيقية فإن: $a+ib=x+iy\Leftrightarrow a=x$ و $b=y$.

مثال

ليكن x و y عددين حقيقيين و z و z' عقديين بحيث: $z=x+y+8i$ و $z'=12+i(x-y)$.
حدد العددين الحقيقيين x و y علما أن $z=z'$.

II)- العمليات في مجموعة الأعداد العقدية

جميع خاصيات الجمع و الضرب في $\mathbb{R}$ تبقى أيضا صحيحة في $\mathbb{C}$ ، و باستعمالها نحصل على:

1)- الشكل الجبري لمجموع — لجداء عددين عقديين

خاصية

لتكن x و y و x' و y' و λ أعدادا حقيقية ، لدينا:

- $(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$
- $(x+iy)-(x'+iy')=(x-x')+i(y-y')$
- $(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$
- $\lambda(x+iy)=(\lambda x)+i(\lambda y)$.
- $-(x+iy)=(-x)+i(-y)$.

المتطابقات الهامة

- $(z_1+z_2)^2=z_1^2+2z_1z_2+z_2^2$
- $(z_1-z_2)^2=z_1^2-2z_1z_2+z_2^2$
- $z_1^2-z_2^2=(z_1-z_2)(z_1+z_2)$
- $z_1^3-z_2^3=(z_1-z_2)(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)$
- $\forall n\geq 2,(z_1+z_2)^n=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k z_1^{n-k}z_2^k$
- $(a+ib)^2=a^2-b^2+2abi$
- $(a-ib)^2=a^2-b^2-2abi$
- $a^2+b^2=(a-ib)(a+ib)$
- $a^2+1=(a-i)(a+i)$
- $z_1^n-z_2^n=(z_1-z_2)(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+z_1^{n-3}z_2^2+...+z_2^{n-1})$
- $z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+z^{n-3}+...+1)$

تمرين

أكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية:

- $z_1=2i-(1+3i)$
- $z_2=2(3-i)-i(2+5i)$
- $z_3=(1+3i)^2$
- $z_4=(1-2i)(2+i)$

2)- الشكل الجبري لمقلوب عدد عقدي غير منعدم – لخارج عدديين عقديين.

خاصية

ليكن $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ عدديين عقديين حيث $(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$ (مع $x\neq 0$ أو $y\neq$)

- مقلوب العدد العقدي z هو العقدي z^{-1} أو $\frac{1}{z}$ بحيث: $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$.
- لدينا: $\frac{z'}{z}=\frac{x'+iy'}{x+iy}=\frac{xx'+yy'}{x^2+y^2}+i\frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}$.

برهان

- $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$.
- $\frac{z'}{z}=z'\times\frac{1}{z}=(x'+iy')\left(\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{xx'+yy'}{x^2+y^2}+i\frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}$

أمثلة

أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد العقدية التالية:

- $z_1=\frac{1}{1+2i}$
- $z_2=\frac{1}{\sqrt{3}-i}$
- $z_3=\frac{2}{1-i\sqrt{3}}$
- $z_4=\frac{z_1}{z_2}$
- $z_5=\frac{z_2}{z_3}$.

3)- قوى العدد i

$i^3=-i$	$i^2=-1$	$i^1=i$	$i^0=1$
$i^7=-i$	$i^6=-1$	$i^5=i$	$i^4=1$
$i^{4n+3}=-i$	$i^{4n+2}=-1$	$i^{4n+1}=i$	$i^{4n}=1$

أمثلة

1) – أحسب $(1+i)^2$ و استنتج $(1+i)^{2011}$.
2) – بسط : $s=1+i+i^2+...+i^{2011}$

III)- التمثيل الهندسي لعقدي représentation géométrique d'un complexe

نفترض في هذه الفقرة أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

1)- لحق نقطة – لحق متجهة Affixe d'un point – Affixe d'un vecteur

أ)-صورة عدد عقدي – لحق نقطة

تعريف

- لكل عقدي $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$، النقطة $M(x,y)$ تسمى صورة العقدي z و نكتب $M(z)$.
- لكل نقطة $M(x,y)$ من المستوى ، العدد العقدي $z=x+iy$ يسمى لحق M و نكتب $z=aff(M)$.

ملاحظة

- المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد الممنظم و المباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ يسمى المستوى العقدي.
- الأعداد الحقيقية هي ألحاق نقطة محور الأفاصيل $(O,\vec{e_1})$، الذي يسمى المحور الحقيقي.
- الأعداد التخيلية الصرفة هي ألحاق محور الأراتيب $(O,\vec{e_2})$، الذي يسمى المحور التخيلي.
- $aff(M)=aff(M')\Leftrightarrow M=M'$.

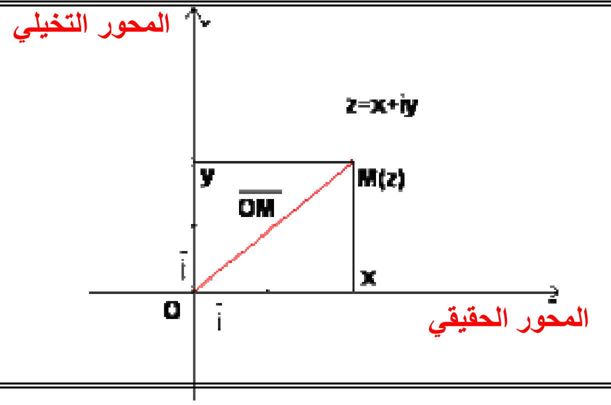
ب- لحق متجهة – الصورة المتجهية لعدد عقدي

تعريف

- المتجهة $\vec{u}(x,y)$ ، تسمى الصورة المتجهية للعدد العقدي $z=x+iy$ و نكتب: $\vec{u}(z)$
- العدد العقدي $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$، يسمى لحق المتجهة $\vec{u}(x,y)$ و نكتب: $z=aff(\vec{u})$.

ملاحظة

- $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow z_{\vec{u}}=z_{\vec{v}}$ و $aff(M)=aff(M')\Leftrightarrow M=M'$.
- $\vec{u}=\overrightarrow{OM}\Leftrightarrow aff(\vec{u})=aff(M)$
- $aff(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha aff(\vec{u})+\beta aff(\vec{v})$
- $aff(-\vec{u})=-aff(\vec{u})$.
- $aff(\overrightarrow{AB})=z_B-z_A$

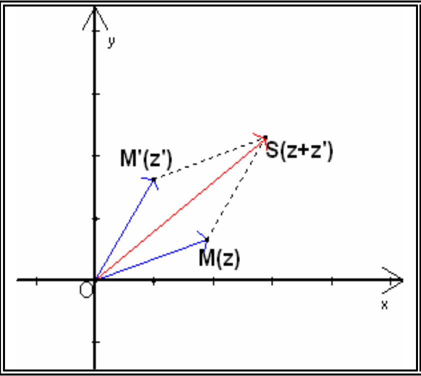


2)- التمثيل الهندسي و العمليات

أ- مجموع عقديين

خاصية

إذا كانت M و M' على التوالي صورتي عدديين عقديين z و z' في المستوى العقدي فإن:
صورة العدد العقدي $z+z'$ هي النقطة S بحيث:
$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$.
(الرباعي $OMSM'$ متوازي الأضلاع)



ب- ضرب عدد عقدي في عدد حقيقي

خاصية

إذا كان z عددا عقديا صورته النقطة M في المستوى العقدي فإن صورة العدد العقدي λz حيث $(\lambda\in\mathbb{R})$ هي النقطة P بحيث: $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OM}$.

ملاحظة

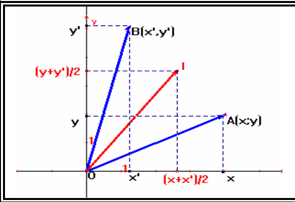
في المستوى العقدي النقطتان $M(z)$ و $M'(-z)$ متماثلتان بالنسبة لأصل المعلم.

3)- تطبيقات

أ- لحق منتصف قطعة

خاصية

إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي لحقاهما على التوالي z_A و z_B فإن لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هو العدد العقدي $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.



ب- استقامية ثلاث نقط من المستوى

خاصية

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي بحث $A\neq C$ و ألحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C.
تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\dfrac{z_B-z_A}{z_A-z_C}\in\mathbb{R}$

برهان

النقط A و B و C مستقيمية $\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}\,/\,(z_B-z_A)=\lambda(z_C-z_A)$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_B-z_A}{z_A-z_C}=\lambda\in\mathbb{R}$ ($A\neq C$ إذن $z_A\neq z_C$)

تمرين

نعتبر في المستوى العقدي النقط $A(1)$ و $B(z)$ و $C(iz+1)$.

➢ حدد مجموعة النقط $B(z)$ من المستوى بحيث تكون النقط $A(1)$ و $B(z)$ و $C(iz+1)$ مستقيمية.

IV)- مرافق عدد عقدي Conjugue d'un nombre complexe

تعريف

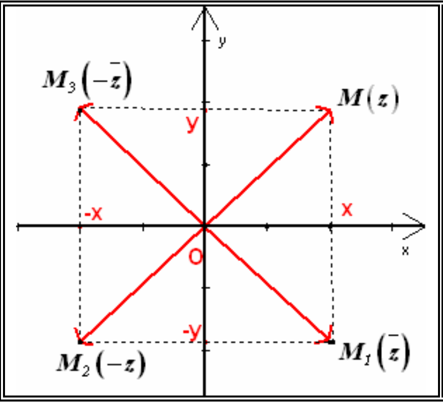
ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا حيث x و y عددان حقيقيان.
العدد العقدي $x-iy$ يسمى مرافق العدد العقدي z و نرمز له بالرمز $\overline{z}$.

أمثلة

- $\overline{1+2i}=1-2i$
- $\overline{-1-i}=-1+i$
- $\overline{-3}=-3$
- $\overline{5i}=-5i$

ملاحظة

في المستوى العقدي ، لدينا:
- $M(z)$ و $M_1(\overline{z})$ متماثلتان بالنسبة للمحور الحقيقي
- $M(z)$ و $M_2(-z)$ متماثلتان بالنسبة لأصل المعلم
- $M(z)$ و $M_3(-\overline{z})$ متماثلتان بالنسبة للمحور التخيلي



نتائج

لكل عدد عقدي $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان ، لدينا:
- $\overline{\overline{z}}=z$
- $z\overline{z}=x^2+y^2=|z|^2\geq 0$
- $Re(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$
- $Im(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

خاصية

لكل عدد عقدي z ، لدينا :
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=z$
- $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=-z$

المرافق و العمليات في المجموعة $\mathbb{C}$

خاصية

ليكن z و z' عددين عقديين و λ عددا حقيقيا و n عددا صحيحا نسبيا.
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$
- $\overline{\lambda z}=\lambda\overline{z}$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}},(z\neq 0)$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}},(z'\neq 0)$
- $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n,z\neq 0$

أمثلة

1) – بين أن : $\forall n\in\mathbb{Z},A=\left(\sqrt{2}+i\right)^{2n+1}-\left(i-\sqrt{2}\right)^{2n+1}\in\mathbb{R}$.
2) – بين أن : $(1+i)^n-(1-i)^n\in i\mathbb{R}$ و $(1+i)^n+(1-i)^n\in\mathbb{R}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.
3) - حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون العدد $Z=z^2-\overline{z}$ عددا حقيقيا.
4) – حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون العدد $Z=2iz-\overline{z}$ عددا حقيقيا.
5) – حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $2z-i\overline{z}=2-3i$.

٧)- معيار عدد عقدي Module d'un nombre complexe

تعريف

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا، حيث x و y عددان حقيقيان

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العقدي z، ونرمز له بالرمز $|z|$، ولدينا:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

أمثلة

- $|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$
- $|1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$
- $|-3+i| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$

التاويل الهندسي

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها $z = x + iy$ (x و y عددان حقيقيان)

لدينا: $M(x,y)$ و منه : $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

خاصية

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي،لحقاهما على التوالي z_A و z_B،لدينا:

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$$

خاصيات

لكل عددين عقديين z و z'، لدينا:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
- إذا كان $z \neq 0$ فإن: $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$
- $|zz'| = |z||z'|$
- $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

ملاحظة

- $\left|\prod_{k=1}^{k=n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{k=n} |z_k|$
- $\left|\sum_{k=1}^{k=n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{k=n} |z_k|$
- إذا كانت A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي ألحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C حيث $z_C \neq z_B$ فإن: $\dfrac{AB}{AC} = \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right|$.

تمرين

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي ألحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C بحيث:

$z_A = 1 + i$ و $z_B = 2 + 3i$ و $z_C = -1 + 2i$

- بين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A

تمرين

نعتبر المجموعتين (C) و (Δ) المعرفتين كما يلي:

- $(C) = \{M(z) \in (P) / |z - 2i| = 1\}$
- $(\Delta) = \{M(z) \in (P) / |z| = |\bar{z} - 1 + 2i|\}$

حدد طبيعة المجموعتين (C) و (Δ)

VI)- عمدة و شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم

Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

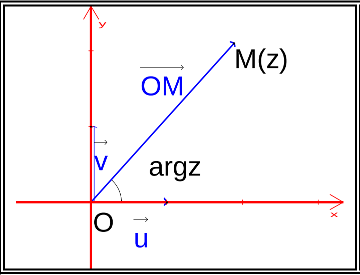
1)- عمدة عدد عقدي غير منعدم

تعريف

ليكن z عددا عقديا غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي

نسمي عمدة العدد العقدي z أحد قياسات الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{e_1},\widehat{\overrightarrow{OM}}\right)$ ،

و نرمز لها بالرمز $\arg z$ و نكتب $\arg z=\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.



ملاحظة

- إذا كان α عمدة لعدد عقدي غير منعدم فإن كل عدد حقيقي يكتب على الشكل $\alpha+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ هو أيضا عمدة للعدد العقدي z و نكتب $\arg z=\alpha[2\pi]$ ، و نأخذ غالبا $\arg z\in]-\pi,\pi]$.
- العدد العقدي 0 ليس له عمدة.

نتائج

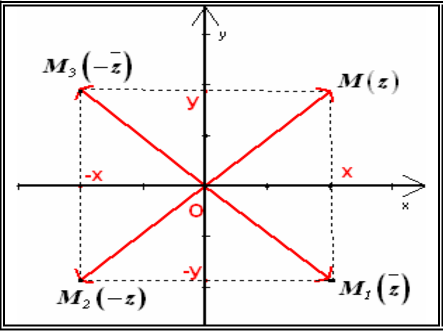
ليكن z عددا عقديا غير منعدم،لدينا:

• عمدة عدد حقيقي غير منعدم	• عمدة عدد عقدي تخيلي صرف و غير منعدم
• $z\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow \arg z=0[2\pi]$	• $z\in i\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow \arg z=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
• $z\in\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow \arg z=\pi[2\pi]$	• $z\in\mathbb{R}_-^*\Leftrightarrow \arg z=-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
• $z\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow \arg z=0[\pi]$	• $z\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow \arg z=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$

خاصية

ليكن z عددا عقديا غير منعدم،لدينا:

- $\arg(-z)=\pi+\arg z[2\pi]$
- $\arg\left(\overline{z}\right)=-\arg z[2\pi]$
- $\arg\left(-\overline{z}\right)=\pi-\arg z[2\pi]$



أمثلة

حدد عمدة العدد العقدي z في الحالات التالية:

- $z=4$
- $z=-2$
- $z=3i$
- $z=-2i$

تمرين

لتكن A و B و C و D نقط من المستوى العقدي ألحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C و z_D بحيث: $z_A=1+i$ و $z_B=-3+3i$ و $z_C=-2-2i$ و $z_D=2-2i$

1)- مثل في المستوى العقدي النقط A و B و C و D

2)- استنتج عمدة لكل من الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C و z_D

تمرين

لتكن $M(z)$ نقطة من الدائرة المثلثية حيث $\frac{\pi}{3}$ أفصولا منحنيا لها.

1)- أنشئ شكلا مناسبا ثم حدد عمدة للعقدي z

2)– حدد الشكل الجبري للعقدي z

3)– استنتج عمدة لكل من : $z_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)- شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم : forme trigonométrique d'un complexe non nul

تعريف

ليكن z عددا عقديا غير منعدم

الكتابة $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ حيث $r=|z|$ و $\arg z=\alpha[2\pi]$ تسمى شكلا مثلثيا للعقدي z

مثال

لنحدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي $z=1+i\sqrt{3}$

لدينا : $|z|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$ و منه $z=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ملاحظة

$z=1+i\sqrt{3}$ $z=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)$ هو أيضا شكل مثلثي للعدد العقدي z

خاصية

ليكن z عددا عقديا غير منعدم

إذا كان $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ و $r>0$ فإن $r=|z|$ و $\arg z=\alpha[2\pi]$

3)- تساوي عددين عقديين على شكلهما المثلثي

خاصية

ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين، لدينا:

$z=z' \Leftrightarrow |z|=|z'|$ و $\arg z=\arg z'[2\pi]$

4)- العلاقة بين الشكل الجبري و شكل مثلثي لعدد عقدي

خاصية

ليكن $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ و $z=x+iy$ على التوالي شكلا مثلثيا و الشكل الجبري لعدد عقدي غير منعدم z .

لدينا : $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\cos\alpha=\frac{x}{r}$ و $\sin\alpha=\frac{y}{r}$

ملاحظة هامة

- $\cos\alpha-i\sin\alpha=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$
- $-\cos\alpha+i\sin\alpha=\cos(\pi-\alpha)+i\sin(\pi-\alpha)$
- $-\cos\alpha-i\sin\alpha=\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha)$
- $\sin\alpha+i\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

تمرين

حدد شكلا مثلثيا لكل من الأعداد العقدية التالية

- $z_1=3+3i$
- $z_2=1-i\sqrt{3}$
- $z_2=-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$
- $z=-\sqrt{3}+i$

تمرين

نعتبر العدد العقدي $z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ حيث $0<\alpha<\pi$

1)- حدد $|z|$ و $\arg z$ بدلالة α

2)- نأخذ $\alpha=\frac{\pi}{6}$

أحسب $|z|$ بطريقتين مختلفتين و استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

3)- باختيارك قيمة مناسبة للعدد الحقيقي α، أحسب بنفس الطريقة $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$

5)- العمليات و عمدة عدد عقدي غير منعدم

خاصية

لكل عددين عقديين z و z' غير منعدمين،لدينا:

- $\arg(zz')=\arg z+\arg z'$
- $\arg\frac{1}{z}=-\arg z$
- $\arg\frac{z}{z'}=\arg z-\arg z'$
- $\forall n\in\mathbb{N},\arg(z^n)=n\arg z[2\pi]$

نتائج

ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين بحيث: $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ و $z=r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$

مع $r>0$ و $r'>0$ ، لدينا:

- $zz'=rr'(\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha'))$
- $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))$
- $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}(\cos(\alpha-\alpha')+i\sin(\alpha-\alpha'))$
- $\forall n\in\mathbb{Z},z^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$

تمرين

نعتبر العددين العقديين $a=1+i$ و $b=\sqrt{3}-i$ و $c=\frac{a}{b}$

1)- أعط شكلا مثلثيا لكل من a و b و c.

2)-أ- حدد الشكل الجبري للعقدي c ثم استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

ب- بين أن $c^{2016}\in\mathbb{R}^+$. $(2016=12\times168)$

تمرين

نعتبر العقدي $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1)- أحسب z^2، ثم حدد عمدة ل z^2

2)- استنتج شكلا مثلثيا للعدد العقدي z

VII)- زاوية متجهتين و عمدة خارج لحقيهما

خاصية

لتكن A و B و C و D نقط من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى ألحاقها على التوالي: z_A و z_B و z_C و z_D ،لدينا:

- $\overline{(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})}=\arg(z_B-z_A)[2\pi]$
- $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})}=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$

نتائج

لتكن A و B و C و D نقط من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى ألحاقها على التوالي: z_A و z_B و z_C و z_D ،لدينا:

- **استقامية ثلاث نقط**

A و B و C مستقيمية $\Leftrightarrow arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=0[2\pi]$ أو $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\pi[2\pi]$

- **توازي مستقيمين**

$((AB)//(CD)) \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=0[2\pi]$ أو $arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\pi[2\pi]$

- **تعامد مستقيمين**

$((AB)\perp(CD)) \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

أمثلة

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي ألحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C بحيث:

$z_A=-2$ و $z_B=1+i$ و $z_C=-1-3i$

- حدد قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

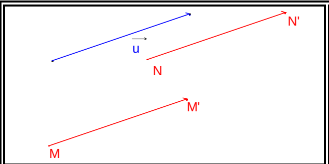
VIII)- الكتابة العقدية لكل من الإزاحة و التحاكي

1)- الكتابة العقدية لإزاحة

تعريف

لتكن $\vec{u}$ متجهة . الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ هي التحويل في المستوى الذي يربط كل نقطة M بالنقطة M' حيث $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

نرمز ب $T_{\vec{u}}$ للإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ و لدينا: $T_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$



ملاحظة

- إذا كان $T_{\vec{u}}(N)=N'$ و $T_{\vec{u}}(M)=M'$ فإن $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

خاصية و تعريف

لتكن $\vec{u}(a)$ متجهة، و لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي،لدينا:

$T_{\vec{u}}(M)=M' \Leftrightarrow z'=z+a$ ، هذه الكتابة تسمى الكتابة العقدية للإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(a)$

مثال

نعتبر الإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}(1,2)$

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي بحيث : $T_{\vec{u}}(M)=M'$

1)- حدد الكتابة العقدية للإزاحة T. (أكتب z' بدلالة z)

2)- حدد $z_{A'}$ لحق النقطة A' ،صورة النقطة $A(2+3i)$ بالإزاحة T

تمرين

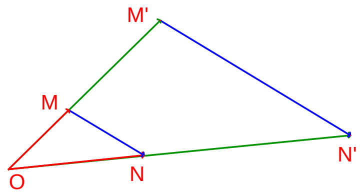
ليكن T التحويل في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث: $z'=z+1-2i$

1)- حدد لحق المتجهة $\overrightarrow{MM'}$

2)- استنتج طبيعة التحويل T.

2)- الكتابة العقدية لتحاك

تعريف

لتكن Ω نقطة من المستوى و $k \in \mathbb{R}^*$ التحويل الذي يربط كل نقطة M بالنقطة M' حيث : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ يسمى التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k و نرمز له بالرمز $h_{(\Omega,k)}$	

ملاحظة

- إذا كان $k \neq 1$ فإن النقطة Ω هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحاكي $h_{(\Omega,k)}$
- إذا كان $h(M) = M'$ فإن النقط Ω و M و M' مستقيمية.
- إذا كان $h(N) = N'$ و $h(M) = M'$ فإن $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

خاصية و تعريف

لتكن $h_{(\Omega,k)}$ تحاكيا مركزه $\Omega(\omega)$ ونسبته $k \in \mathbb{R}^*$ ، و لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي:
لدينا: $h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$ ، هذه الكتابة تسمى الكتابة العقدية للتحاكي $h_{(\Omega,k)}$.

مثال

نعتبر التحاكي h الذي مركزه $\Omega(1,2)$ و نسبته 3.
لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي بحيث : $h(M) = M'$
1)- حدد الكتابة العقدية للتحاكي h. (أكتب z' بدلالة z)
2)- حدد $z_{A'}$ لحق النقطة A'، صورة النقطة $A(2+3i)$ بالتحاكي h .

تمرين

ليكن h التحويل في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث: $z' = \frac{1}{2}z - 2i$
1)- حدد ω لحق النقطة Ω التي تحقق $h(\Omega) = \Omega$.
2)- بين أن : $z' - \omega = \frac{1}{2}(z - \omega)$، ثم أول متجهيا هذه المتساوية.
3)- استنتج طبيعة التحويل h