

تقديم: ذ. العربي الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

التمرين الأول :

(1) نبين أن $A^{2k} = I$ ($\forall k \in \mathbb{N}$)

نستعمل الإستدلال بالترجع

من أجل $k = 0$ لدينا $A^0 = I$ (معطيات)ليكن k من \mathbb{N} .نفترض أن $A^{2k} = I$. لنبين أن : $A^{2(k+1)} = I$ لدينا : $A^{2(k+1)} = A^{2k} \times A^2$.وبما أن $A^{2k} = I$ 

http://www.vrac-colorpages.net

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & 0 \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{و}$$

فإن : $A^{2(k+1)} = I \times I = I$ ومنه : $A^{2k} = I$ ($\forall k \in \mathbb{N}$)(2) نبين أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} ونحدد A^{-1} :لدينا $A^2 = I$ أي $A \times A = I$

ومنه

المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} ولدينا $A^{-1} = A$.

الجزء الثاني :

(1) أنبين أن * قانون تركيب داخلي في I :ليكن x و y عنصرين من I . لنبين أن $x * y$ عنصر من I .لدينا : $x \in I$ و $y \in I$ إذن $x - a > 0$ و $y - b > 0$ وبالتالي $(x - a)(y - a) + a > a$ أي $x * y > a$ ومنه $x * y \in I$.وعليه فإن لكل x و y من I لدينا $x * y \in I$.

ومنه

* قانون تركيب داخلي في I .

(1) بنبين أن * قانون تبادلي :

ليكن x و y عنصرين من I .لدينا $x * y = (x - a)(y - a) + a = (y - a)(x - a) + a = y * x$ ومنه : $x * y = y * x$ لكل x و y من I . وبالتالي :

* قانون تبادلي .

نبيّن أن * تجميعي :

x و y و z عناصر من I .
لدينا :

$$\begin{aligned}
 (x * y) * z &= (x * y - a)(z - a) + a \\
 &= ((x - a)(y - a) + a - a)(z - a) + a \\
 &= ((x - a)(y - a))(z - a) + a \\
 &= (x - a)[(y - a)(z - a)] + a \\
 &= (x - a) \left[\underbrace{(y - a)(z - a) + a - a}_{y * z} \right] + a \\
 &= (x - a)[(y * z) - a] + a \\
 &= x * (y * z)
 \end{aligned}$$



ومنه $(x * y) * z = x * (y * z)$ لكل x و y و z من I
وبالتالي

القانون * تجميعي .

1) ج-نبيّن ان القانون * يقبل عنصرا محايدا .

إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون * في I فإن $(\forall x \in I): x * e = x$ (* تبادلي)

$$\text{يكافئ } (\forall x \in I): (x - a)(e - a) + a = x$$

$$\text{يكافئ } (\forall x \in I): (e - a)x - a(e - a) + a = x$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} e - a = 1 \\ -a(e - a) + a = 0 \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } e = 1 + a$$

ومنه

$(I, *)$ يقبل عنصرا محايدا وهو $e = 1 + a$.

2) نبيّن أن $(I, *)$ زمرة تبادلية :

ليكن x و x' عنصرا من I .

$$x * x' = e \Leftrightarrow (x - a)(x' - a) + a = 1 + a$$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{1}{x - a} + a \quad (x > a)$$

ولدينا $x' > a$

$$\text{ومنه لكل } x \text{ من } I \text{ مماثلا في } I \text{ وهو } \frac{1}{x - a} + a$$

وبما أن * قانون تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا في I .
فإن

$(I, *)$ زمرة تبادلية .

3) نبيّن أن φ تشاكل من $(I, *)$ نحو (R_+^*, \times) :

ليكن x و y عنصرين من I .

$$\varphi(x * y) = \frac{1}{x * y - a} = \frac{1}{(x - a)(y - a) + a - a} = \frac{1}{x - a} \times \frac{1}{y - a} = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

ومنه لكل x و y من I لدينا $\varphi(x * y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$
وبالتالي



http://www.vrac-colorpages.net

φ تشاكل من $(I, *)$ نحو (R_+, \times) .



<http://www.vrac-colorages.net>

نبين أن φ تقابل من I نحو R_+^* .

ليكن y عنصرا من R_+^* .
لدينا :

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x-a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{y} + a$$

بما أن $y > 0$ فإن $\frac{1}{y} + a > a$ أي أن $x \in I$

ومنه لكل y من I يوجد عنصروا x في I حيث $\varphi(x) = y$.
وعليه فإن

φ تشاكل تقابلي من $(I, *)$ نحو (R_+^*, \times)

(3) ب-نحل في المجموعة I المعادلة $x^{(3)} = a^3 + a$

لدينا $x^{(3)} = a^3 + a \Leftrightarrow \varphi(x^{(3)}) = \varphi(a^3 + a)$
ومنه

$$x^{(3)} = a^3 + a \Leftrightarrow \varphi(x * x * x) = \varphi(a^3 + a)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) \times \varphi(x) \times \varphi(x) = \varphi(a^3 + a)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-a}\right)^3 = \frac{1}{a^3 + a - a}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x-a}\right)^3 = \frac{1}{a^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-a} = \frac{1}{a} \quad (a > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 2a$$



<http://www.vrac-colorages.net>

ومنه

المعادلة تقبل حلا وحيدا وهو $2a$

التمرين الثاني :

(1) نبين ان N يقبل القسمة على 11 :

لدينا العدد N ممثل في نظمة العد العشري إذن : $N = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2009}$
نستنتج أن العدد N هو مجموع حدود متتابعة لممتالية هندسية أساسها 10.

ومنه حسب صيغة المجموع : $N = \frac{10^{2010} - 1}{10 - 1}$

ولدينا $10 \equiv -1 [11]$ إذن $10^{2010} \equiv (-1)^{2010} [11]$ أي $10^{2010} \equiv 1 [11]$.
وبالتالي $10^{2010} - 1 \equiv 0 [11]$

وحيث أن $9 \wedge 11 = 1$ فإن $[11] \equiv 0$. $\frac{10^{2010} - 1}{9} \equiv 0$ (لاحظ أن $\frac{10^{2010} - 1}{10 - 1}$ عدد طبيعي محترم !)
وبالتالي $[11] \equiv 0$ وهذا يعني أن

N يقبل القسمة على 11.

ملاحظة : لدينا $[11] \equiv -1$ إذن :

$$\begin{aligned} N &\equiv 1 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{2010} [11] \\ &\equiv \underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \dots - 1 + 1}_{2010 \text{ fois } 1} [11] \\ &\equiv 0 [11] \end{aligned}$$



<http://www.vrac-colorpages.net>

وبالتالي N يقبل القسمة على 11.

(2) - نتحقق من أن العدد 2011 أولي

الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2011 هي : 2 ، 3 ، 5 ، ... و 43
بما أن العدد 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد فإنه أولي .

. من خلال السؤال 1 لدينا $N = \frac{10^{2010} - 1}{10 - 1}$ إذن :

$$10^{2010} - 1 = 9N$$

(2) ب- نبين أن 2011 يقسم $9N$:

لدينا 2011 عدد أولي و $10 \wedge 2011 = 1$

إذن حسب مبرهنة فيرما الصغرى لدينا : $10^{2010} \equiv 1 [2011]$

وبالتالي : $10^{2010} - 1 \equiv 0 [2011]$

وحيث أن $10^{2010} - 1 = 9N$ فإن $9N \equiv 0 [2011]$

ومنه :

$$2011 \text{ يقسم } 9N .$$

(2) ج- استنتاج :

لدينا 2011 يقسم $9N$ و $9 \wedge 2011 = 1$ إذن 2011 يقسم N حسب مبرهنة كوص.

(3) نبين أن N يقبل القسمة على 22121 :

لدينا $22121 = 11 \times 2011$

وبما أن $[11] \equiv 0$ و $N \equiv 0 [2011]$ و $11 \wedge 2011 = 1$

فإن $[11 \times 2011] \equiv 0$

أي $[22121] \equiv 0$

وهذا يعني أن :

$$\text{العدد } N \text{ يقبل القسمة على } 22121 .$$

التمرين الثالث :

الجزء الأول :

(1) نتحقق من أن $z_1 = -m + 2$ حل للمعادلة (E_m) : تعويض

(2) أ- نبين أن : $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

نعلم أن $z_1 z_2 = -im^2 - 2(1-i)m + 4$ (جداء حلي معادلة من الدرجة الثانية)

وبالتالي :

$$z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow -im^2 - 2(1-i)m + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

(2) ب- لنحل في C المعادلة $im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

المميز المختصر لهذه المعادلة هو $\delta = (1-i)^2 + 3i = i = \frac{1}{2}(2i) = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}(1+i)\right)^2$

$$m = \frac{-(1-i) + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{i} \quad \text{أو} \quad m = \frac{-(1-i) - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{i} \quad \text{ومنه}$$

وبالتالي :

$$m = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i \quad \text{أو} \quad m = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$$

الجزء الثاني :

(1) أ) نبين ان :

نعتبر النقطة $I(1)$.

$$S(M) = M' \Leftrightarrow z' - 1 = -(z - 1)$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_I = -(z_M - z_I) \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow z_{\overline{M'}} = -z_{\overline{M}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$$

وبالتالي

S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة $I(1)$

(1) ب) نبين ان $z'' = iz + 2$

$$M'' = R(M) \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1 - i) + 1 + i$$

$$\Leftrightarrow z'' = i(z - 1 - i) + 1 + i \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow z'' = iz + 2$$

ومنه

$$z'' = iz + 2$$

(2) أ) نحسب $\frac{z''-2}{z'-2}$:

$$\frac{z''-2}{z'-2} = \frac{iz}{-(z-1)-1} = -i \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{z''-2}{z'-2} = -i \quad \text{لدينا : استنتاج}$$

$$\frac{z''-2}{z'-2} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{إذن :}$$

$$\arg\left(\frac{z''-2}{z'-2}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \quad \text{و} \quad \left|\frac{z''-2}{z'-2}\right| = 1 \quad \text{ومنه}$$

وبالتالي : $\frac{AM''}{AM'} = 1$ و $\arg(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$. ومنه :

$AM'M''$ مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

(2) ب) نحدد مجموعة النقط M حيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة :



لتكن M نقطة من المستوى تخالف Ω و O . وبالتالي النقط A و Ω و M' و M'' مختلفة

$$\frac{z''-2}{z'-2} \times \frac{z'-1-i}{z''-1-i} \in R \text{ يكافئ } M'' \text{ و } M' \text{ و } \Omega \text{ و } A \text{ ومنه النقطة}$$

$$\frac{z-1+i}{z-i-1} \in R \text{ يكافئ}$$

$$\frac{z-1+i}{z-i-1} = \overline{\left(\frac{z-1+i}{z-i-1}\right)} \text{ يكافئ}$$

$$z + \bar{z} = 2 \text{ يكافئ}$$

$$\text{Re}(z) = 1 \text{ يكافئ}$$



في حالة $M = \Omega$ نجد أن $M'(1-i)$ و $M'' = \Omega$

ولدينا A و Ω و $M'(1-i)$ غير مستقيمة ومنه A و Ω و M' و M'' متداورة. وعليه فإن :

مجموعة النقط M حيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة هي المستقيم الذي معادلة $x = 1$

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

(1) نتحقق من أن $e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$

ليكن x عنصرا من المجموعة $]1, +\infty[\cup]0, 1]$. لدينا :

$$\begin{aligned} e^x = x^n &\Leftrightarrow x = \ln x^n \\ &\Leftrightarrow x = n \ln x \\ &\Leftrightarrow n = f(x) \end{aligned}$$

ومنه

$$e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$$

(2) لنبين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \text{ لأن } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x} = 0 \text{ لدينا :}$$

وبما أن $0 \in R$ فإن

f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 .

(3) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0^- \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+ \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

هندسيا : المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب عمودي للمنحنى (C) .

المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل جوار $(+\infty)$.

(4) ندرس تغيرات الدالة :

الدالة f قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0, 1[$ و $]1, +\infty[$ ولكل x من $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ لدينا :



$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e \quad \text{ولدينا :}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,1[\cup]1,e[\quad \text{و}$$

نستنتج ان

f تزايدية قطعا على $]e,+\infty[$ وتناقصية قطعا على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$.

جدول تغيرات f هو :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
f	0	$-\infty$	$(+\infty)$	$+\infty$

(5) نبين ان المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف :

الدالة f قابلة للإشتقاق مرتين على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ ولكل x من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا :

$$f''(x) = \frac{\ln^2 x - 2 \frac{\ln x}{x} (\ln(x) - 1)}{(\ln x)^4}$$

$$= \frac{\ln x}{x(\ln x)^4} [\ln(x)(2 - \ln x)]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = e^2$$

ولدينا :

المشتقة الثانية للدالة f تنعدم في العدد e^2 وتغير إشارتها بجواره

إذن :

المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف زوج إحداثيتها هو $(e^2, \frac{e^2}{2})$.

(6) إنشاء (C).

(7) نفترض أن $n \geq 3$.

لدينا $f(x) \in]-\infty,0[$ لكل x من $]0,1[$ إذن المعادلة لا تقبل حلا في $]0,1[$

الدالة f متصلة و تناقصية قطعا على $]1,e[$

$$f(1,e) =]e,+\infty[$$

وبما أن $n \in]e,+\infty[$ فإنه يوجد عدد وحيد في $]1,e[$ حيث $f(a_n) = n$

الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على $]1,e[$

إذن f تقابل من $]e,+\infty[$ نحو $]e,+\infty[$.

وبما أن $n \in]e,+\infty[$ فإنه يوجد عدد وحيد b_n في $]e,+\infty[$ حيث $f(b_n) = n$.

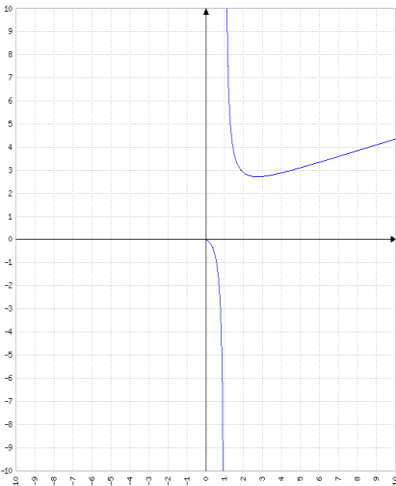
ومنه :

لكل n من N حيث $n \geq 3$ ، المعادلة $f(x) = n$ أي (E) تقبل بالضبط حلين a_n و b_n ولدينا : $1 < a_n < e < b_n$.

الجزء الثاني :

(1) بين أن $b_n \geq n$: $(\forall n \geq 3)$

ليكن n من N حيث $n \geq 3$.



لدينا $b_n \in [e, +\infty[$ و $f(b_n) = n$

$$b_n - f(b_n) = b_n - \frac{b_n}{\ln b_n} = b_n \left(\frac{\ln(b_n) - 1}{\ln b_n} \right)$$

ولدينا $b_n \in [e, +\infty[$ إذن $\ln b_n > 1$ وبالتالي $b_n > f(b_n)$ ومنه :

$$(\forall n \geq 3) \quad b_n > n$$

استنتاج : بما أن $(\forall n \geq 3) \quad b_n > n$ و $\lim(n) = +\infty$ فإن $\lim b_n = +\infty$

(2) نبين أن $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية :

ليكن n من N حيث $n \geq 3$

$$f(a_{n+1}) = n+1 \quad \text{و} \quad f(a_n) = n$$

$$\text{إذن : } f(a_{n+1}) > f(a_n)$$

وبما أن f تناقصية قطعاً على $[1, e]$ فإن $a_{n+1} < a_n$

ومنه : $a_{n+1} < a_n$ لكل n من N حيث $n \geq 3$.

وعليه فإن المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية .

استنتاج : بما أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية ومصغرة بالعدد 1 فإنها منتقاربة .

(2) نبين أن $\frac{1}{n} < \ln a_n < \frac{e}{n}$ لكل n من N حيث $n \geq 3$.

ليكن n من N حيث $n \geq 3$

$$\text{لدينا } f(a_n) = n \quad \text{إذن} \quad \frac{a_n}{\ln a_n} = n \quad \text{وبالتالي} \quad a_n = n \ln a_n$$

$$\text{وحيث أن } 1 < a_n < e \quad \text{فإن} \quad 1 < n \ln a_n < e$$

$$\text{وبالتالي} \quad \frac{1}{n} < \ln a_n < \frac{e}{n} \quad \text{لكل } n \text{ من } N \text{ حيث } n \geq 3.$$

استنتاج : لدينا $(\forall n \geq 3) : \frac{1}{n} < \ln a_n < \frac{e}{n}$

$$\text{إذن : } (\forall n \geq 3) : e^{\frac{1}{n}} < a_n < e^{\frac{e}{n}}$$

$$\text{وحيث أن } \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{e}{n}} = 1 \quad \text{فإن}$$

$$\lim a_n = 1 \quad (\text{حسب مبرهنة الدركي ... احتراماتي وتقديراتي !})$$

(2) نبين أن $\lim a_n^n = e$:

لدينا a_n حل للمعادلة (E) .

$$\text{إذن} \quad e^{a_n} = a_n^n$$

بما أن $\lim a_n = 1$ و الدالة الأسية النبرية متصلة في 1

$$\text{فإن} \quad \lim e^{a_n} = e^1 = e$$

$$\text{ومنه} \quad \lim a_n^n = e$$

التمرين الخامس :

(1) نبين أن $(\forall x \geq 0) : 0 \leq F(x) \leq x e^{-x^2}$



http://www.vrac-coloriage.net



http://www.vrac-coloriage.net

ليكن x عددا حقيقيا موجبا. لدينا :

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq x &\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-t^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow \int_0^x e^{-x^2} dt \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt \\ &\Rightarrow 0 \leq e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^x 1 dt \\ &\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \end{aligned}$$

ومنه $(\forall x \geq 0): 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

(1) نبين أن $e^{-x^2} \leq e^{-x}$; $(\forall x \geq 1)$

$$\begin{aligned} x \geq 1 &\Rightarrow x^2 \geq x \\ &\Rightarrow -x^2 \leq -x \\ &\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x} \end{aligned}$$

ومنه $(\forall x \geq 1) ; e^{-x^2} \leq e^{-x}$

استنتاج : لدينا $(\forall x \geq 0): 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$

إن $(\forall x \geq 1): 0 \leq F(x) \leq xe^{-x}$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

(2) نبين أن F قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$ وأن $(\forall x \geq 0) ; F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$

بما أن الدالة $t \mapsto e^{-t^2}$ متصلة على $[0, +\infty[$ فإن الدالة $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ومنه F قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ولكل x من $[0, +\infty[$ لدينا :

$$F'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + (e^{-x^2})^2$$

$$(\forall x \geq 0) ; F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

(3) نبين أن G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$:

نضع $X = \tan x$ ولدينا : $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$ إذن : $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(\tan x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} F(X) = 0$

ومنه $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) = G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ وبالتالي :

$$G \text{ متصلة على اليسار في } \frac{\pi}{2}$$

(3) نبين أن $(\exists c \in]0, +\infty[) : F'(c) = 0$

الدالة G متصلة على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ وقابلة للإشتقاق على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ و $G(0) = G\left(\frac{\pi}{2}\right)$

إذن حسب مبرهنة رول يوجد عدد حقيقي c' من المجال $0, \frac{\pi}{2}$ حيث $G'(c') = 0$.

وبالتالي $(1 + \tan^2 c')F'(\tan c') = 0$; $(\exists c' \in]0, \frac{\pi}{2}[$;

ومنه : $F'(\tan c') = 0$; $(\exists c' \in]0, \frac{\pi}{2}[$;

وبما أن $c' \in]0, \frac{\pi}{2}[$ فإن $\tan c' \in]0, +\infty[$.

نأخذ $c = \tan c'$ ومنه :

$$(\exists c \in]0, +\infty[) : F'(c) = 0$$

وحيث أن $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ فإن : $e^{-2c^2} - 2cF(c) = 0$ أي أن : $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$.

(4) لنبين أن H تناقصية على $]0, +\infty[$:

$$H(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} (e^{-2x^2} - 2xF(x))$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$H'(x) = \frac{-4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}{4x^2} - e^{-x^2} = \frac{-8x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}{4x^2} < 0$$

إذن

H تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$

(4) نستنتج أن c وحيد :

لدينا $H(x) = 0 \Leftrightarrow F'(x) = 0$ لكل x من $]0, +\infty[$ و $H(c) = F'(c) \cdot \frac{e^{c^2}}{2c} = 0$

وبما أن الدالة H تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$ فإن : $H(c) = 0$; $(\exists! c \in]0, +\infty[)$; وبالتالي $F'(c) = 0$; $(\exists! c \in]0, +\infty[)$;

جدول تغيرات F :

$$\text{لدينا } H(x) = F'(x) \cdot \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

بما أن x من $]0, +\infty[$ فإن إشارة $F'(x)$ هي إشارة $H(x)$.

لدينا H تناقصية على $]0, +\infty[$.

إذا كان $x \leq c$ فإن $H(c) \leq H(x)$ أي $0 \leq H(x)$

إذا كان $c \leq x$ فإن $H(x) \leq H(c)$ أي $H(x) \leq 0$

ومنه F' موجبة على $]0, c[$ وسالبة على $]c, +\infty[$



جدول تغيرات F هو :

x	0	c	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	0	$-$
F	0	$\frac{1}{2c}e^{-2c^2}$	0

wadiiifi@hotmail.com

وقفكم الله

